مکانیک سیالات

Fluid Mechanics

استاد درس: مهندس قدیمی

دانشکده کشاورزی سمنگان

اسفند ماه ۱۳۹۸

سرفصل درس

مکانیک سیالات

تعداد واحد : ۳

نوع واحد : نظری- اجباری

پیشنیاز : دینامیک

سرفصل درس (۵۱ ساعت)

۱- بررسی خواص فیزیکی سیالات

۲- سیالات درحالت سکون : فشار هیدرواستاتیکی وتغییرات آن ، نیروی واردبرسطوح ، شناوری سکون نسبی

۳- قوانین حاکم برحرکت سیالات : انواع جریان ، خط وسیر جریان روابط پیوستگی ، انرژی ومقدار حرکت

۴- تجزیه وتحلیل ابعادی : مطالعات ابعادی ، اعداد بدون بعد ، اصول مدلهای هیدرولیکی

۵- بررسی جریانها درمجاری تحت فشار : جریانهای لایه‌ای و آشفته ، افت فشاردرلوله‌ها ، افت‌های موضعی ، خط انرژی وشیب هیدرولیکی ، لوله‌های مرکب (سری وموازی)

۶- نیروهای واردبراجسام ناشی ازجودسیال : فشرحد ، جداشی ، نیروی رانش ، اصطکاک وفشار ، نیروی واردبرساختمانهاوشناورها

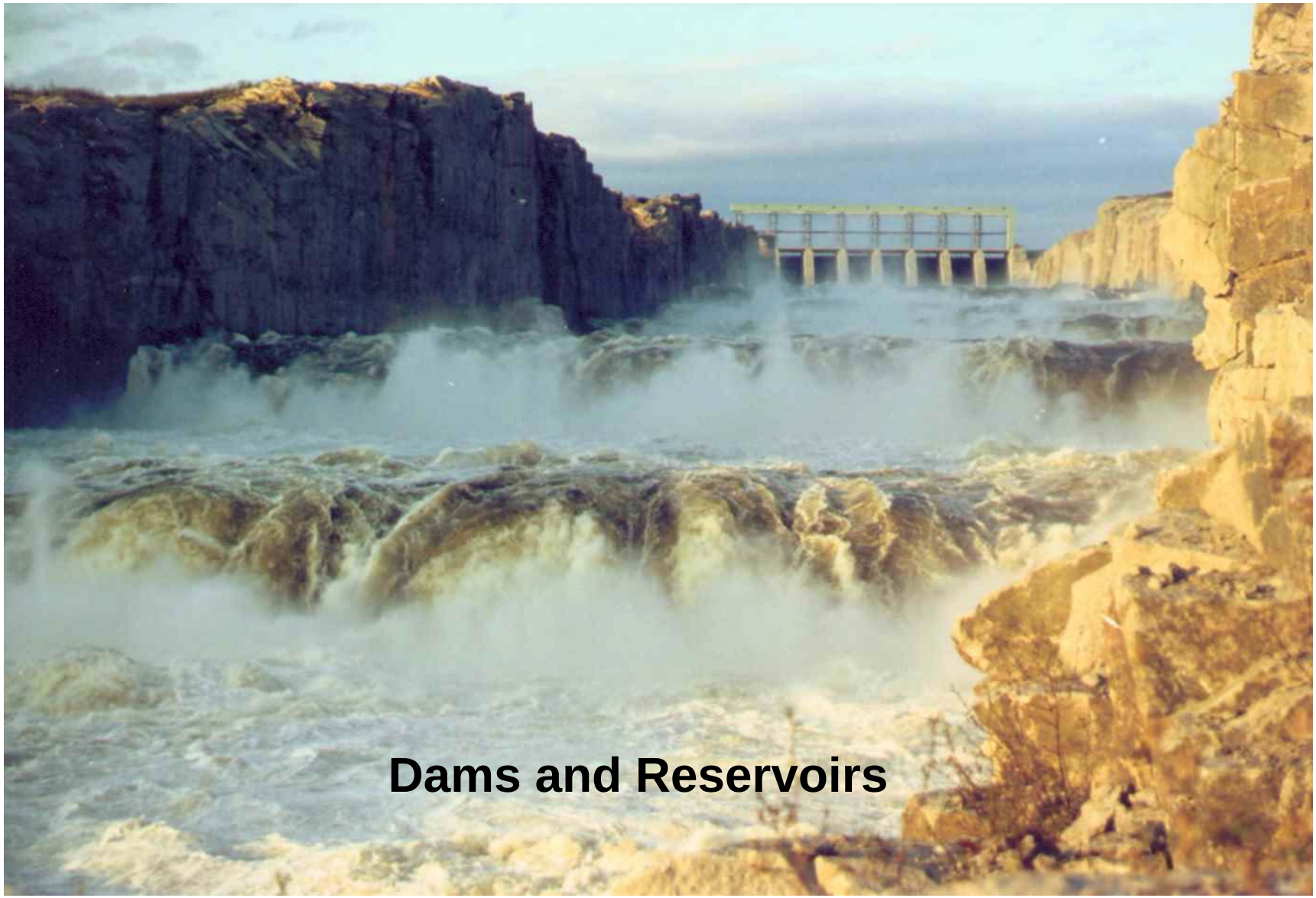
اهمیت

- سیالات برای زندگی ضروری است:
  - ۹۵٪ بدن انسان آب است.
  - ⅔ سطح زمین از آب پوشیده شده است.
  - اتمسفر زمین تا ۱۷ کیلومتر بالاتر از سطح زمین امتداد دارد.

- تاریخ بشر در اثر سیالات متحول شده است:
  - زمین ریخت شناسی (Geomorphology)
  - مهاجرت و تمدن بشر
  - روشها و تئوریهای ریاضیات و علوم جدید
  - -جنگ افزارها

- تاثیر بر روی تمامی بخشهای زندگی

چرا مکانیک سیالات را مطالعه می کنیم؟



Fluid Properties

سیال: (fluid)

سیال ماده ای است که اگر تحت تاثیر تنش برشی مماسی قرار گیرد بطور پیوسته تغییر شکل می دهد ، هر چند تنش برشی اندک باشد.

مکانیک سیالات رفتار سیالات ساکن (static) یا متحرک (dynamic) را بررسی می کند.

سیال حالات مایع (liquid) و گاز (gas) یا بخار را شامل می گردد.

تراکم ناپذیر (جرم مخصوص ثابت) Incompressible

تراکم پذیر compressible

محیط پیوسته: (Continuum)

به جای تلفیق پیچیده اثرات واقعی ملکولهای مجزا از توزیع پیوسته فرضی ماده (محیط پیوسته) استفاده می شود. روش محیط پیوسته هنگامی که مسیر متوسط آزاد ملکولها (mean free path) با کوچکترین طول با معنی مسئله هم مرتبه باشد بکار نمی آید (مثلا در حالتی که مقدار گاز کمی در محفظه بزرگی وجود دارد).

مسیر متوسط آزاد ملکولها متوسط فاصله ای است که ملکولهای سیال بین دو برخورد متوالی طی می کنند.

بعد (Dimension)

اختصاراتی است که برای بیان نمودهای جسم استفاده می شود. ابعاد مستقل را ابعاد اصلی (primary units) و بقیه ابعاد را ابعاد فرعی یا ثانویه (secondary units) می نامند.

ابعاد اصلی (PRIMARY UNITS)

Quantity	Dimension	International System of Units (SI)	U.S. Customary System (USCS)	cgs (سانتی متر-گرم-ثانیه)
طول (Length)	L	meter, m	foot, ft	Cm
جرم (Mass)	M	kilogram, kg	slug, slug / pound mass, lbm	gram, g
زمان (Time)	T	second, s	second, s	second, s
حرارت درجه (Temperature)	θ	Kelvin, K	Rankin, R	Kelvin, K

اسلاگ مقدار جرمی است که تحت اثر ۱ lbf ۱ شتابی برابر ft/s^2 می گیرد (1 slug = 32.2 lbm).

$g= 9.81\ m/s^2=32.2\ ft/s^s$

lbm مقدار ماده ای است که سطح زمین آنرا با نیروی 1 lbf به طرف خود می کشد (وزن آن 1 lbf است).

نیرو از ابعاد فرعی بوده و به ترتیب در سیستم SI، USCS و cgs از واحد نیوتن (N)، پوند نیرو (lbf) و دین (dyne,dyn) استفاده می شود. البته می توان به جای جرم از نیرو به عنوان واحد اصلی استفاده کرد.

ابعاد فرعی (SECONDARY UNITS)

واحدهای فرعی زیادی وجود دارند که از ترکیب واحدهای اصلی تولید می شوند. مهمترین واحدهای فرعی در مکانیک سیالات عبارتند از:

Quantity	SI Unit	Dimension
سرعت (velocity)	m/s	LT^{-1}
شتاب (acceleration)	m/s^2	LT^{-2}
نیرو (force)	N $kg\ m/s^2$	$M\ LT^{-2}$
انرژی/کار (energy/work)	Joule J N m, $kg\ m^2/s^2$	ML^2T^{-2}
توان (power)	Watt W N m/s $kg\ m^2/s^3$	ML^2T^{-3}
فشار/تنش (pressure/stress)	Pascal P, N/m^2, $kg/(m.s^{2)}$	$ML^{-1}T^{-2}$
جرم مخصوص یا چگالی (density)	kg/m^3	ML^{-3}
وزن مخصوص (specific weight)	N/m^3 $kg/(m^2.s^{2)}$	$ML^{-2}T^{-2}$
چگالی نسبی (relative density)	بدون واحد	1 بی بعد

قانون همگنی ابعادی:

معادلات اساسی فیزیک از نظر ابعادی همگن هستند. معادله همگن معادله ای است که از عملیات تحلیلی بدست آمده و مبین یک پدیده فیزیکی باشد و در تمام سیستمهای آحاد معتبر است.

دانستن بعد کمیتها جهت تبدیل واحدها از یک سیستم به سیستم دیگر ضروری است:

$$\rho(t/m^3) = \frac{1000kg}{(100)^3 cm^3} = 10^{-3}\, kg/cm^3$$

$$p(lbf/ft^2) = \frac{4.448N}{(0.3048)^2 m^2} = 47.88\, pa$$

واحدهای طرفین یک معادله را می توان به سهولت کنترل کرد. چنانچه واحدها یکسان نباشند حتما اشتباهی روی داده است. مثلا امکان ندارد:

30 kg/m s = 30 m !

.

خواص مربوط به جرم

جرم مخصوص (MASS DENSITY)

جرم مخصوص (ρ - "rho") با واحد Kg/m^3 جرم در واحد حجم را نشان می دهد.

بعد: ML^{-3}

مقادیر نمونه: (در دمای 288.15 K (4 ^oC) و فشار $(1.013x10^5\ N/m^2$
آب= $1000\ Kg/m^3$ $(62.4\ lbm/ft^3)$ جیوه= $13546\ Kg/m^3$
هوا = $1.23Kg/m^3$ روغن پارافین = $800\ Kg/m^3$

تغییرات چگالی

هوا : تراکم پذیری بالا / تغییرات شدید چگالی
آب: تراکم پذیری پایین

چگالی مایعات تقریبا ثابت بوده اما با تغییر درجه حرارت و فشار مایع تغییر کمی می کند:

$$\rho = \rho\ (liquid, T, p)$$

$T\uparrow \quad \rho\downarrow$
$p\uparrow \quad \rho\uparrow$

وزن مخصوص (SPECIFIC WEIGHT)

وزن مخصوص ("gamma" -γ) با واحد N/m^3 وزن در واحد حجم را نشان می دهد:

$$\gamma = \rho g$$

که در آن g شتاب ثقل ($9.81\ m/s^2$) است.

بعد: $ML^{-2}T^{-2}$

مقادیر نمونه: (در دمای $288.15\ K$ ($4\ ^oC$) و فشار $1.013x10^5\ N/m^2$)

آب= $9.79\ KN/m^3$ جیوه= $132.9\ KN/m^3$

هوا= $11.8\ KN/m^3$ روغن پارافین= $7.85\ KN/m^3$

چگالی نسبی (RELATIVE DENSITY)

نسبت وزن مخصوص سیال به وزن مخصوص آب:

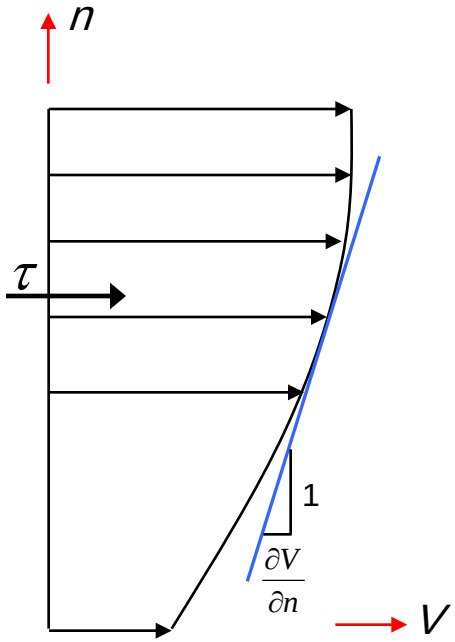
$$S = \frac{\gamma_{fluid}}{\gamma_{water}} = \frac{\rho_{fluid}}{\rho_{water}}$$

چگالی نسبی بی بعد است. مثلا چگالی نسبی جیوه در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد برابر است با:

$$S_{Hg} = \frac{\gamma_{hg}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{133\,kN/m^3}{9.81\,kN/m^3} = 13.6$$

قانون لزجت نیوتن: (Newton's Viscosity Law)

در یک جریان آرام (Laminar flow) که ذرات سیال در خطوط مستقیم و موازی حرکت می کنند، در سیالات نیوتنی (Newtonian Fluids) تنش برشی بر روی سطحی مماس بر امتداد جریان متناسب است با میزان تغییر سرعت در امتداد عمود بر آن سطح:



$$\tau \propto \frac{\partial V}{\partial n}$$

نرخ کرنش (Strain rate)

$$\dot{\varepsilon}(1/s)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$$

μ : ضریب لزجت (Coefficient of viscosity) یا ضریب لزجت دینامیکی با بعد ($ML^{-1}T^{-1}$):

$$\mu = \frac{\tau}{dV/dy} = \frac{N/m^2}{(m/s)/m} = N \times s/m^2 = {kg}/{m.s}$$

در سیستم SI واحد آن $kg/m.s$ یا $N.s/m^2$ می باشد که نام بخصوصی ندارد.

در سیستم cgs واحد لزجت g/cm.s می باشد که پواز (poise) نامیده می شود.

$$1\,{kg}/{m.s} = \frac{1000\,gr}{100\,cm.s} = 10\,poise \qquad 1 centipoise = 0.01 poise$$

Typical values:

Water dynamic viscosity = 1 centipoises (10^{-2} poise) = $1.005*10^{-3}$ kg/m.s

(at temperature T = 20 ^{o}C and pressure of 1 atm)

اگر لزجت دینامیک را بر جرم مخصوص تقسیم کنیم، لزجت سینماتیک (Kinematic Viscosity) بدست می آید:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{ML^{-1}/T^{-1}}{M/L^{-3}} = L^2T^{-1} = {m^2}/{s}$$

در سیستم SI واحد آن m^2/s و در cgs استوک (stoke) می باشد. در USCS نیز با ft^2/s نمایش داده می شود.

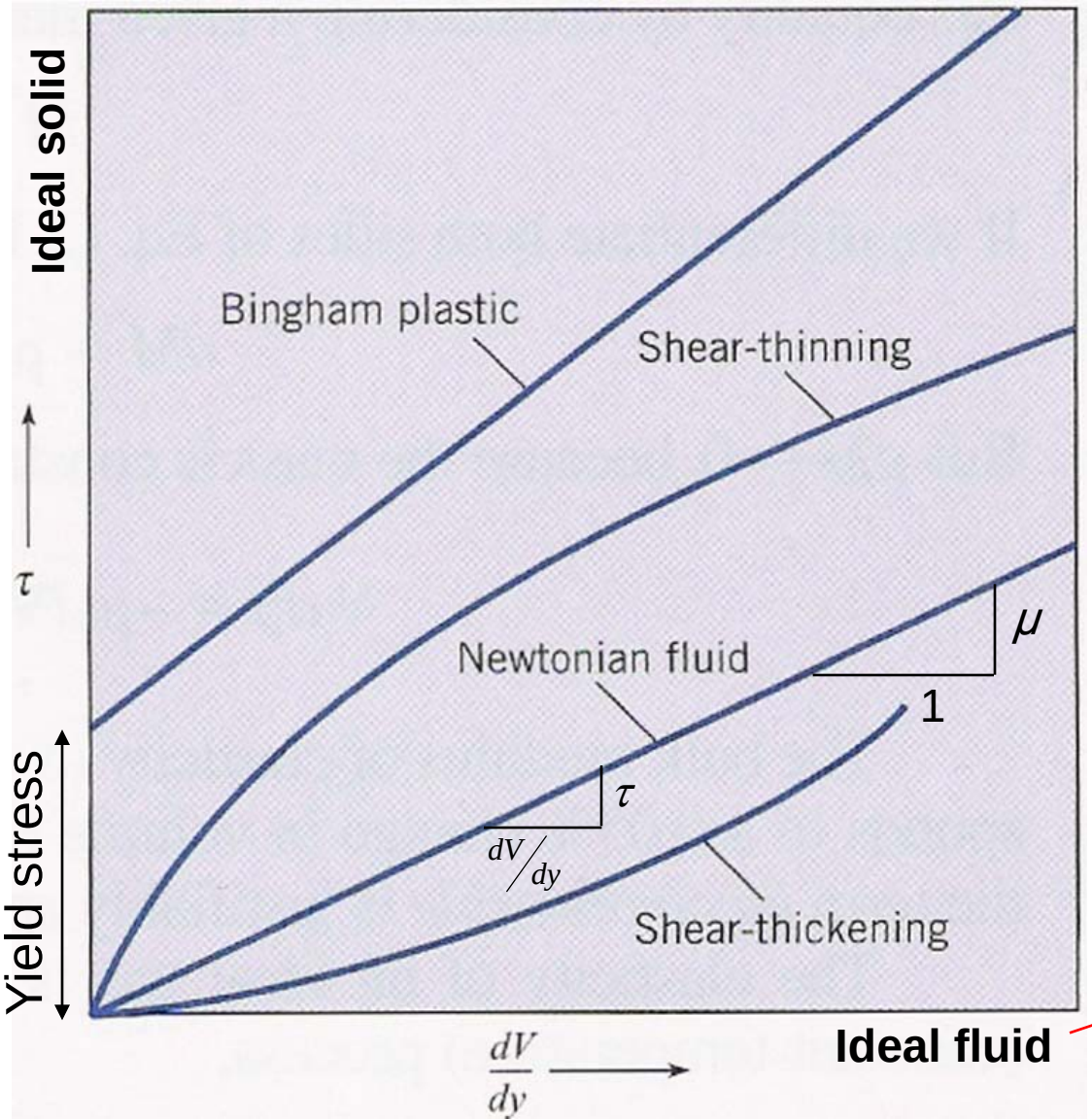
$$1\,{m^2}/{s} = 10^4\,stoke$$

Typical values:

Water $= 1.14 \times 10^{-6}\ m^2 s^{-1}$, Air $= 1.46 \times 10^{-5}\ m^2 s^{-1}$, Mercury $= 1.145 \times 10^{-4}\ m^2 s^{-1}$,
Paraffin Oil $= 2.375 \times 10^{-3}\ m^2 s^{-1}$.

سیالات نیوتنی (NEWTONIAN) و غیر نیوتنی (NON-NEWTONIAN)

سیالات نیوتنی بر خلاف سیالات غیر نیوتنی سیالاتی هستند که در آنها نسبت تنش برشی و نرخ کرنش برشی خطی است.



در کنار سیالات نیوتنی که اکثر مایعات ساده و گازها را شامل می شوند، سیالاتی وجود دارند (خمیر paste، دوغاب slurry، گریس grease، پلیمرهای بلند high polymer...) که رابطه تنش و نرخ کرنش در آنها خطی نیست.

سیال ایده آل سیال غیر قابل تراکم و غیر لزج است (μ=0) که در آن تنش برشی تحت هیچ نوع حرکتی ایجاد نمی شود.

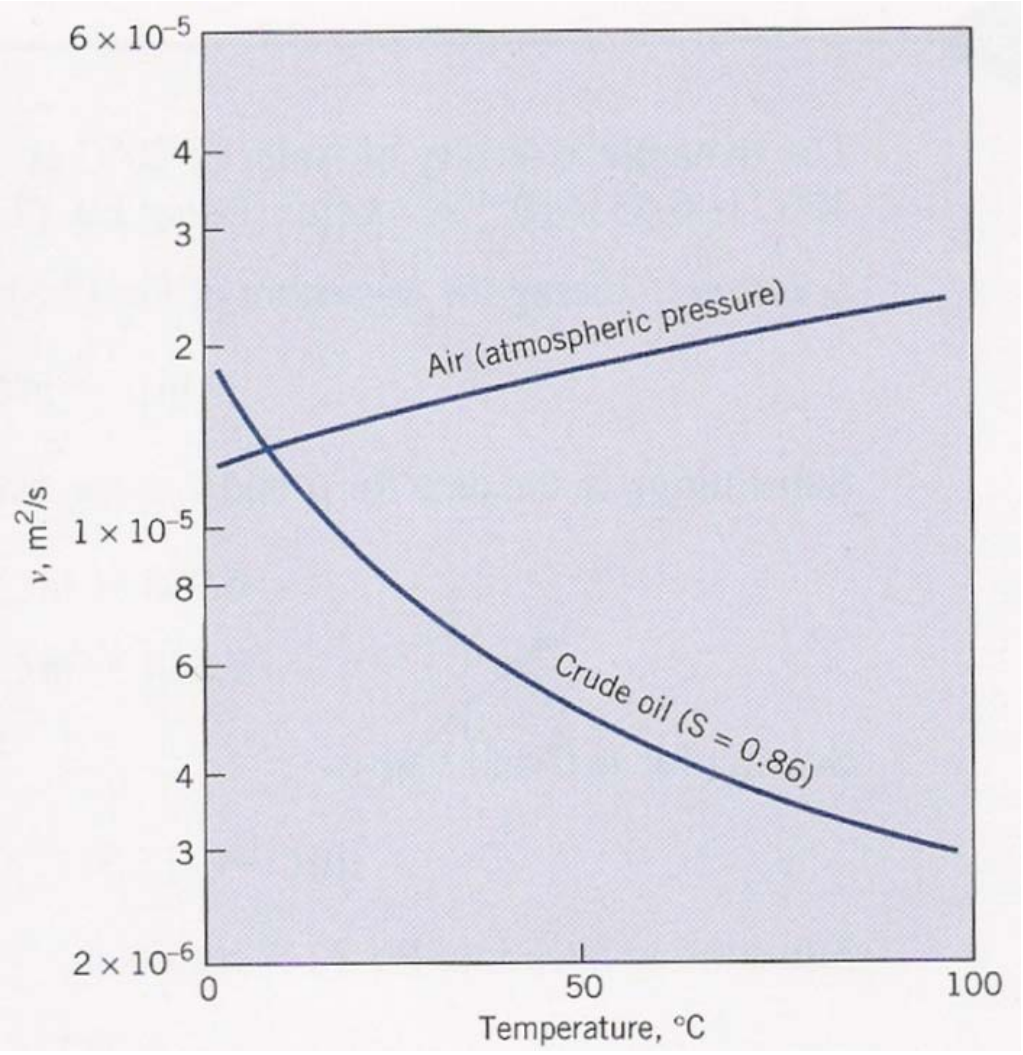
تغییرات لزجت نسبت به تغییر فشار و درجه حرارت:

gas and liquid $\mu\uparrow$ $p\uparrow$, but smal $\Delta\mu$

gas: $\mu\uparrow$ $T\uparrow$

liquid: $\mu\downarrow$ $T\uparrow$

Due to structural differences, more molecular activity, decreased cohesive forces



لزجت مایعات و گازها با افزایش فشار کمی افزایش می یابد.

لزجت مایعات با افزایش دما کاهش می یابد در صورتی که گازها رفتاری دقیقا متضاد دارند.

در مایعات لزجت ناشی از جاذبه بین ملکولی قوی است که با افزایش دما کاهش می یابد:

$$\mu = Ce^{b/T}$$

μ - the dynamic viscosity of fluid ("miu")

C, b - empirical constants

T - temperature

در گازها ملکولها از یکدیگر دور بوده و تحرک زیادی دارند لذا جاذبه ملکولی کم است. حرکات و برخورد ملکولها که عامل لزجت است با افزاش دما بیشتر می شود.

گاز کامل: (Perfect gas)

گاز کامل سیالی است که اثرات متقابل ملکولهای سیال صرفا ناشی از برخوردهای کاملا الاستیک باشد.

حجم مخصوص (Specific volume)

$$pv_s = RT$$ معادله حالت (Equation of State)

یا

$$p = \rho RT$$

R (ثابت گاز) فقط به وزن ملکولی سیال بستگی دارد:

$$R = \frac{p}{\rho T} = \frac{N/m^2}{kg/m^3(^oK)} = \frac{N.m}{kg(^oK)} = \frac{J}{kg(^oK)}$$

رفتار گاز کامل بر مبنای فقدان کامل جاذبه ملکولی است لذا رفتار گازها در نزدیک شرایط تقطیر تا حد زیادی از رفتار گاز کامل دور می شود.

در جرم مشخص از m گاز: $\frac{V_1}{\rho_1 T_1} = \frac{V_2}{\rho_2 T_2} = R$ و یا $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = mR$

قانون آووگادرو: (Avogadro's law)

یک مول از کلیه گازها در شرایط متعارف (P=1 atm, T=273 ^{o}k) ۲۲ /۴ لیتر حجم را اشغال می کند.

وزن $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ملکول گاز برابر با جرم ملکولی آن (مثلا ۳۲ kg اکسیژن O_2)

ثابت جهانی گازها:

دو محفظه گاز را در شرایط یکسان دما، فشار و حجم در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{P_1V_1}{T_1} = m_1R_1 \\ \dfrac{P_2V_2}{T_2} = m_2R_2 \end{cases} \xrightarrow{V_1=V_2 \quad T_1=T_2 \quad P_1=P_2} m_1R_1 = m_2R_2$$

اما تعداد ملکولهای دو ظرف برابر است (بر مبنای قانون آووگادرو حجمهای مساوی از گازها در شرایط یکسان دما و فشار مطلق تعداد ملکول یکسانی دارند):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

m_1: جرم n ملکول از گاز اول

M_1: جرم $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ملکول از گاز اول

m_2: جرم n ملکول از گاز دوم

M_2: جرم $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ملکول از گاز دوم

$$M_1 R_1 = M_2 R_2$$

و یا

$$\boxed{MR = cte}$$

MR ثابت جهانی گازها نامیده می شود و در سیستم آحاد بین المللی برابر است با:

$$MR = 8312 \; J/{}^{o}K$$

$$R = \frac{8312}{M} \; J/kg\,{}^{o}K$$

مدول حجمی: (bulk modulus)

در تغییرات سریع و یا فشار بسیار زیاد قابلیت تراکم مایعات اهمیت پیدا می کند.

ضریب تراکم پذیری (Coefficient of compressibility)

$$\beta = \frac{-1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

β: با واحد $1/pa$

T: دمای ثابت (Isothermal)

مدول حجمی (بالک)

$$E[k] = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial v / v}\right)_T$$

$E[k]$: با واحد pa

مقدار k برای آب در دمای اطاق و فشار اتمسفر ۲۰۶۸ Mpa می باشد. مقدار k با افزایش فشار افزایش می یابد مثلا در فشار ۳۰۰۰ atm مدول حجمی آب دو برابر می شود.

فشار بخار: (Vapor pressure)

وقتی تبخیر مایعات در یک محیط محصور صورت گیرد، ملکولهای بخار فشاری جزئی در فضا وارد می کنند که در حالت تعادل به عنوان فشار بخار شناخته می شود. حالت تعادل وضعیتی است که تعداد ملکولهای برخورد کننده به سطح مایع که وارد مایع می شوند برابر با تعداد ملکولهای جدا شونده از سطح مایع باشند.

از آنجایی که فعالیت ملکولی تابعی از دما است، فشار بخار سیال نیز بستگی به دما داشته و با افزایش دما زیاد می شود.

زمانی که فشار روی مایع برابر فشار بخار مایع باشد، مایع می جوشد. مثلا اگر فشار به حد کافی کاهش یابد آب در دمای اطاق می جوشد در حالی که در فشار طبیعی (۱ اتمسفر) آب در دمای ۱۰۰ درجه می جوشد (در نقاط مرتفع نقطه جوش کمتر از ۱۰۰ درجه اما در زودپز بیشتر از ۱۰۰ درجه است).

خلا زایی: (Cavitation)

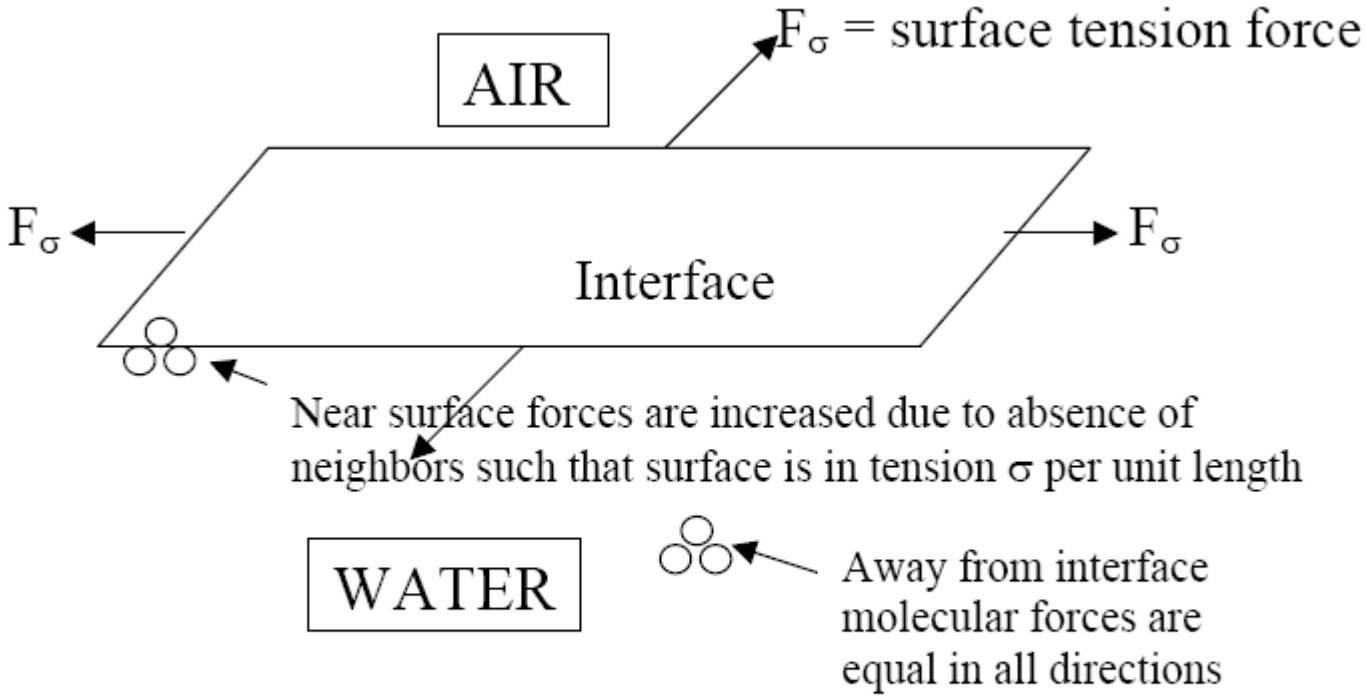
اگر تبدیل مایع به گاز صرفا ناشی از افزایش دما باشد آن را تبخیر (Evaporation) می نامند و چنانچه در اثر کاهش فشار روی دهد (فشار سیال از فشار بخار کمتر گردد) خلا زایی (Cavitation) نامیده می شود.

خطر کاویتاسیون در ورودی پمپها و خروجی توربین ها وجود دارد. نقاط خلا ایجاد شده توسط جریان به مناطق با فشار بالاتر منتقل شده و به سرعت پر می شوند که به کاهش راندمان و خوردگی فلزات منجر می شود.

کشش سطحی: (Surface tension)

پدیده کشش سطحی ناشی از اختلاف جاذبه بین ملکولهای یکسان (پیوستگی-Cohesion) و جاذبه بین ملکولهای غیر یکسان (چسبندگی- Adhesion) است.

در داخل مایع، نیروهای پیوستگی یکدیگر را خنثی می کنند ولی در سطح آزاد مایع نیروهای پیوستگی که از پایین اثر می کنند از نیروهای چسبندگی محل تماس مایع و گاز بیشتر می شود. بدلیل تفاوت این نیروها مرز دو سیال شبیه یک پوسته تحت کشش عمل می کند.

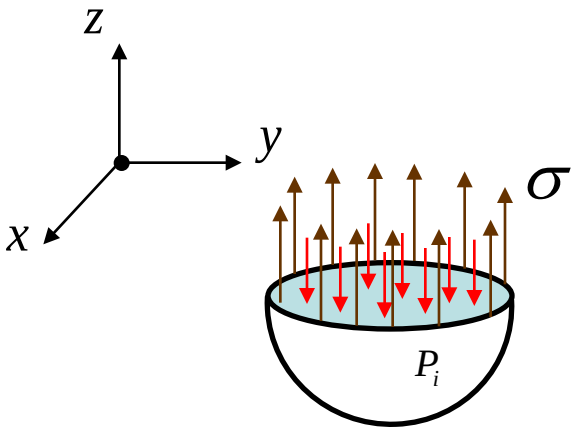


$\sigma_{air/water} = 0.073$ N/m

$F_\sigma = \sigma \times L =$ Force normal to cut, L=length of cut

ضریب کشش سطحی (شدت بارگذاری خطی مماس بر سطح)

اگر قطره ای به شعاع R و فشار نسبی داخلی (فشار داخل منهای فشار اتمسفر) P_i را در حال تعادل در نظر بگیریم*:



$$\sum F_z = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -P_i(\pi R^2) + \sigma(2\pi R) = 0$$

$$\boxed{P_i = \frac{2\sigma}{R}}$$

مثلا با در نظر گرفتن این امر که ضریب کشش سطحی در دمای اطاق برای آب مجاور هوا برابر با $\sigma = 0.073\, {}^{N}\!/_{m}$ است، در قطره ای به شعاع 0.5 mm:

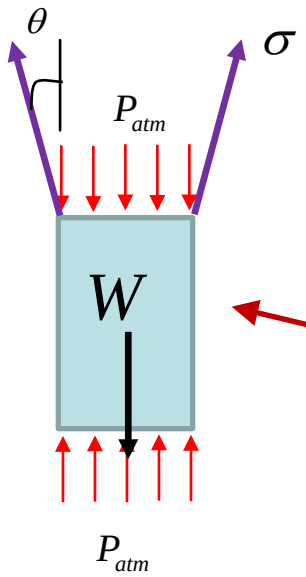
$$P_i = \frac{2\times 0.073}{0.5\times 10^{-3}} = 292 \quad Pa$$

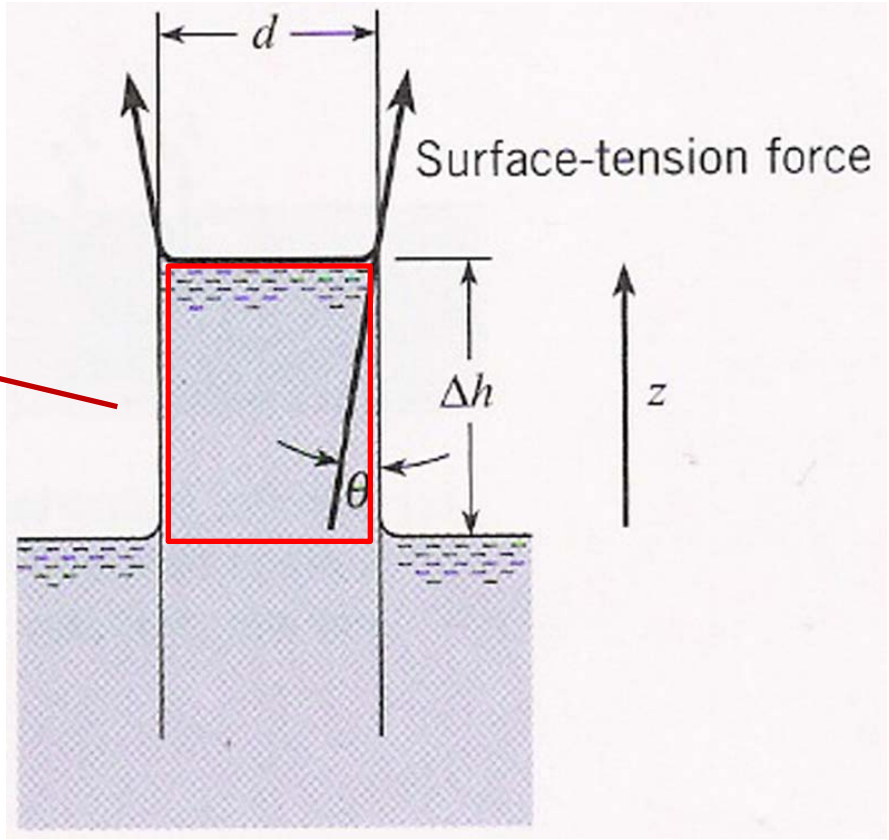
$$= 0.00288 \quad atm \qquad (1\,atm = 101325\,Pa)$$

در حباب کشش سطحی در هر دو وجه داخلی و خارجی (محلهای تماس با هوا) وجود دارد. بنابراین**:

$$-P_i(\pi R^2) + 2\sigma(2\pi R) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_i = \frac{4\sigma}{R}}$$

موئینگی: (Capillary)





$$\sum F_z = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (\pi d)\sigma\cos\theta - W = 0$$

$$(\pi d)\sigma\cos\theta - \frac{\pi d^2}{4}\times\Delta h\times\gamma = 0$$

$$\boxed{\Delta h = \frac{4\sigma\cos\theta}{d\gamma}}$$

Hydrostatics (1)

تنش: (Stress)

کمیت (quantity)

- اسکالر (scalar) تنها با مقدار کمیت مشخص می شود. نظیر درجه حرارت، زمان، جرم،...
- بردار (vector) علاوه بر مقدار راستای کمیت نیز باید مشخص گردد. سه کمیت اسکالر (مولفه های بردار در سه راستای متعامد) برای تعریف بردار لازم است. نظیر سرعت، شتاب، نیرو،...
- تانسور (tensor) توصیف این کمیتها به ۹ مولفه اسکالر یا بیشتر نیاز دارد. نظیر تنش، کرنش، ممان اینرسی،...

کمیات اسکالر و برداری را می توان به ترتیب تانسور مرتبه صفر ($3^0=1$) و مرتبه یک ($3^1=3$) دانست.

میدان (field) توزیع پیوسته ای (continuous distribution) از یک کمیت اسکالر، برداری یا تانسوری است که با توابع پیوسته ای از مختصات فضا و زمان (x,y,z,t) بیان شود. مثلا:

دما $T(x,y,z,t)$

سرعت $\vec{v}(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)\vec{i} + g(x,y,z,t)\vec{j} + h(x,y,z,t)\vec{k}$

تنش ⟵ ۹ مولفه اسکالر

توزیع نیرو (force distribution)

سطحی (surface force): از تماس جسم با محیط اطراف ناشی شده و بر مبنای واحد سطح ماده ای که به آن اثر می کند بیان می شود.

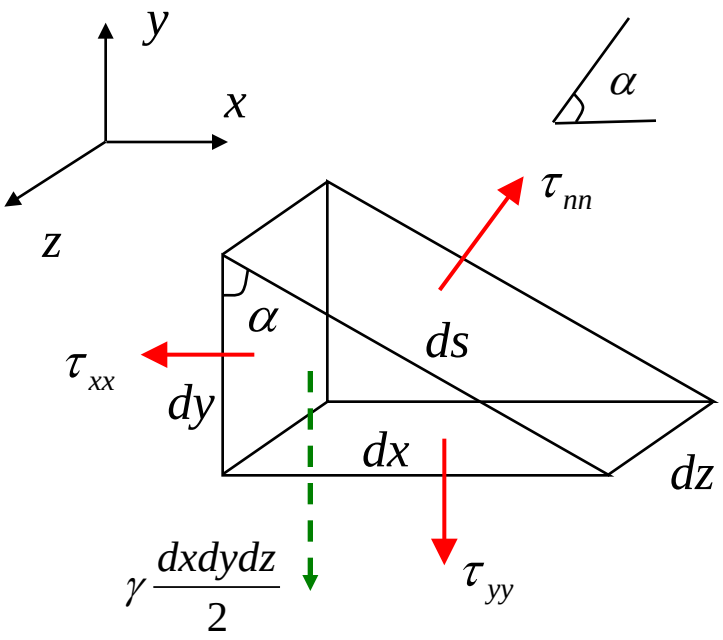
$\vec{T}(x, y, z, t)$

حجمی (body force): بر مبنای واحد جرم ماده ای که نیرو بر آن اثر می کند بیان می شود و برای تاثیر بر روی ماده تماس مستقیم نیاز نیست (نظیر ثقل و مغناطیس).

$\vec{B}(x, y, z, t)$

تنش در سیال ساکن (Stationary fluid) و جریان غیر لزج (Nonviscous flow) :

در سیال ساکن و سیال دارای جریان یکنواخت (تمام المانها سرعت یکسان دارند) طبق قانون لزجت نیوتن تنش برشی صفر است:



$$\sum F_x = 0$$

$$-\tau_{xx} dydz + \tau_{nn} dsdz \cos\alpha = 0$$

$$-\tau_{xx} dydz + \tau_{nn} dydz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xx} = \tau_{nn}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-\tau_{yy} dxdz - \frac{\gamma dxdydz}{2} + \tau_{nn} dsdz \sin\alpha = 0$$

$$-\tau_{yy} + \tau_{nn} - \frac{\gamma dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{yy} = \tau_{nn}$$

(dy کوچک است)

بنابراین در سیال ساکن و دارای حرکت یکنواخت تنش مستقل از جهت بوده ($\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$) و لذا کمیتی اسکالر است (قانون پاسکال). این تنش همان فشار ترمودینامیکی با جهت مخالف می باشد که تنش هیدرواستاتیک نیز نامیده می شود.در سیال غیر لزج در حال حرکت:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-\tau_{xx} dydz + \tau_{nn} dsdz \cos\alpha = \rho \frac{dxdydz}{2} a_x$$

$$-\tau_{xx} + \tau_{nn} = \rho \frac{dx}{2} a_x$$

(dx کوچک است)

$$\Longrightarrow \boxed{\tau_{xx} = \tau_{nn}}$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-\tau_{yy} dxdz - \frac{\gamma dxdydz}{2} + \tau_{nn} dsdz \sin\alpha = \rho \frac{dxdydz}{2} a_y$$

$$-\tau_{yy} + \tau_{nn} = \frac{dy}{2}(\gamma + \rho a_y)$$

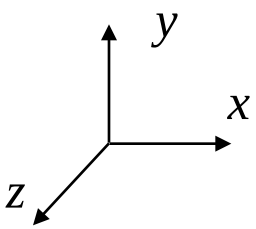
$$\Longrightarrow \boxed{\tau_{yy} = \tau_{nn}}$$

(dy کوچک است)

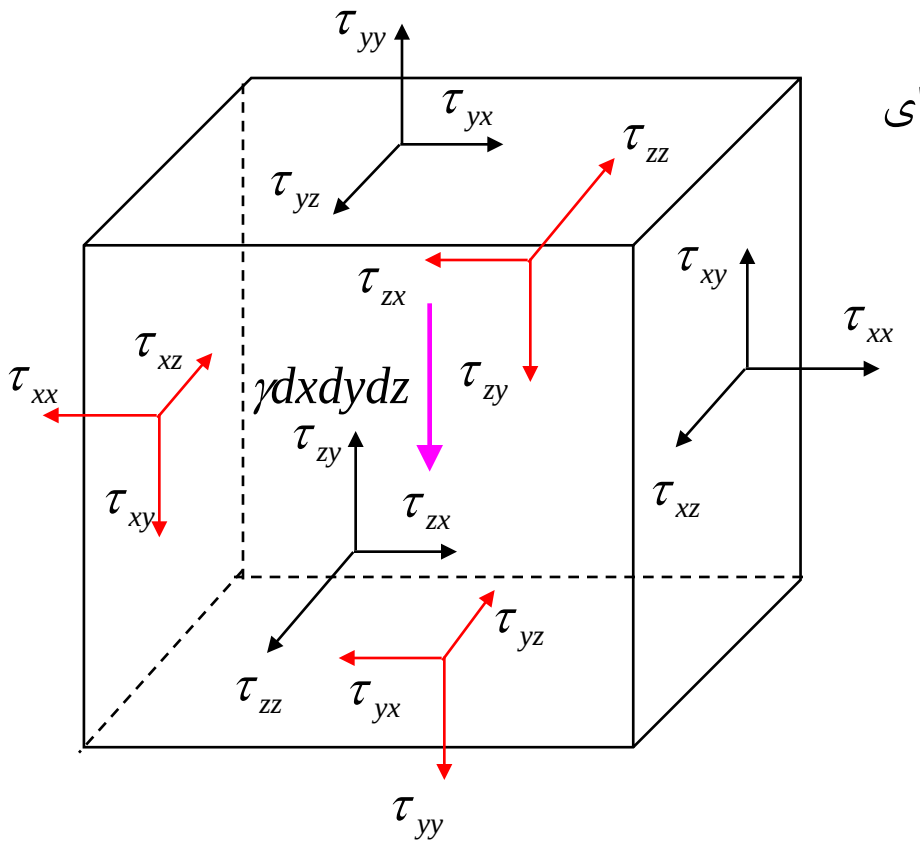
بنابراین در سیال غیر لزج نیز تنش کمیتی اسکالر است.

از آنجایی که در بخشهای عمده ای از سیال تاثیرات لزجت قابل صرفنظر کردن است (بدلیل تنش برشی بسیار کوچک)، می توان از این فرض ساده کننده در اغلب حالات استفاده کرد.

خواص تانسورتنش (Properties of stress) :

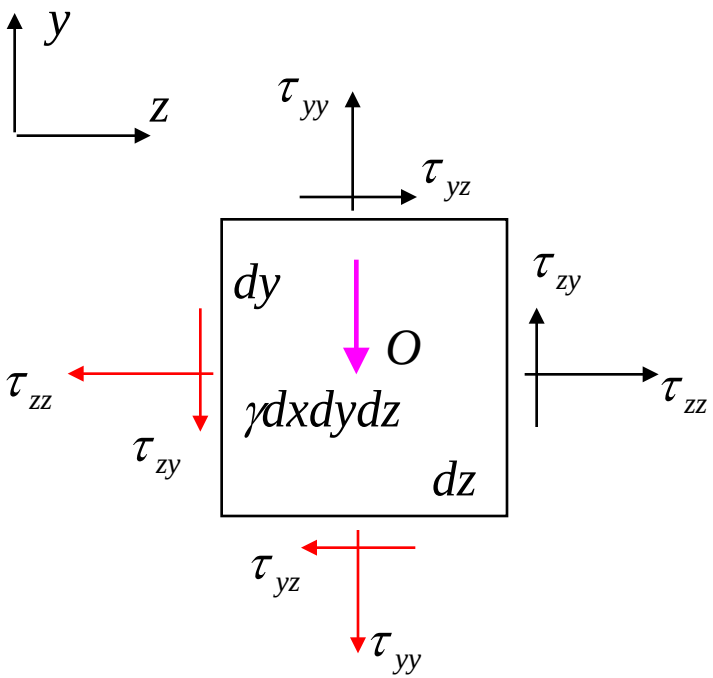


τ_{ij} $\left\{ \begin{array}{l} i \text{ راستای عمود بر سطحی (یا صفحه ای) که تنش اعمال می شود.} \\ j \text{ راستای تنش} \end{array} \right.$



تنشهای وجوه پشت مکعب (قرمز رنگ) برابر با تنشهای سطوح روبروی مکعب و در خلاف جهت آنها هستند (ابعاد المان کوچک است).

دید در جهت x:



$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0$$

$$(\tau_{yz} dzdx)dy - (\tau_{zy} dydx)dz = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

به همین ترتیب با لنگر گیری در جهات دیگر:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

اگر حالت تعادل وجود نداشته باشد، جمله اینرسی نیز در رابطه وارد می شود اما نظیر نیروی حجمی بدلیل بالاتر بودن مرتبه دیفرانسیل حذف می گردد. بنابراین در سیالات (نیوتنی، غیر نیوتنی) نیز نظیر جامدات همواره تانسور تنش ۶ مولفه مستقل دارد.

در سیال لزج متحرک در صورت وجود حرکت نسبی لایه ها در سیال تنش برشی ایجاد شده و در نتیجه تنشهای قائم در جهات مختلف معمولا یکسان نخواهد بود. در صورت استفاده از میانگین حسابی تنشهای قائم:
(تنش حجمی - Bulk stress)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})$$

تنش حجمی بستگی به جهت نداشته و کمیتی اسکالر است*. در سیال غیر لزج:

$$\bar{\sigma} = \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$$

در صورت استفاده از فشار ترمودینامیکی (کمیت مربوط به حالت تعادل) به جای تنش (کمیت حالت تعادل و عدم تعادل):

$$-\bar{\sigma} = p$$

با توجه به منفی بودن تنش
قائم سیالات در اکثر حالات

تنش های عمومی وارد بر یک وجه مایل:

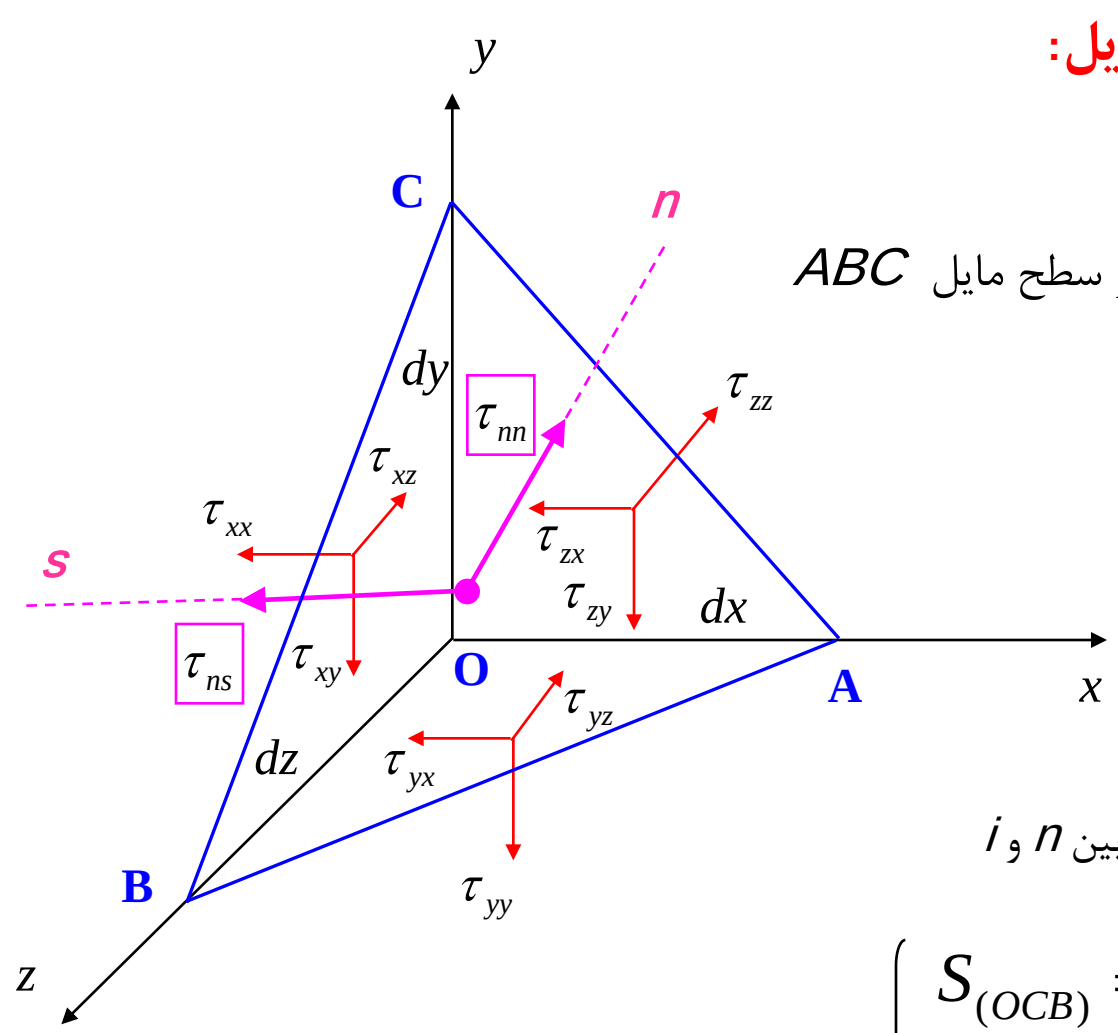
n: راستای عمود بر سطح مایل

s: یکی از دو راستای متعامد تنش برشی وارده بر سطح مایل ABC

a_{nx}: کسینوس هادی راستای n نسبت به i

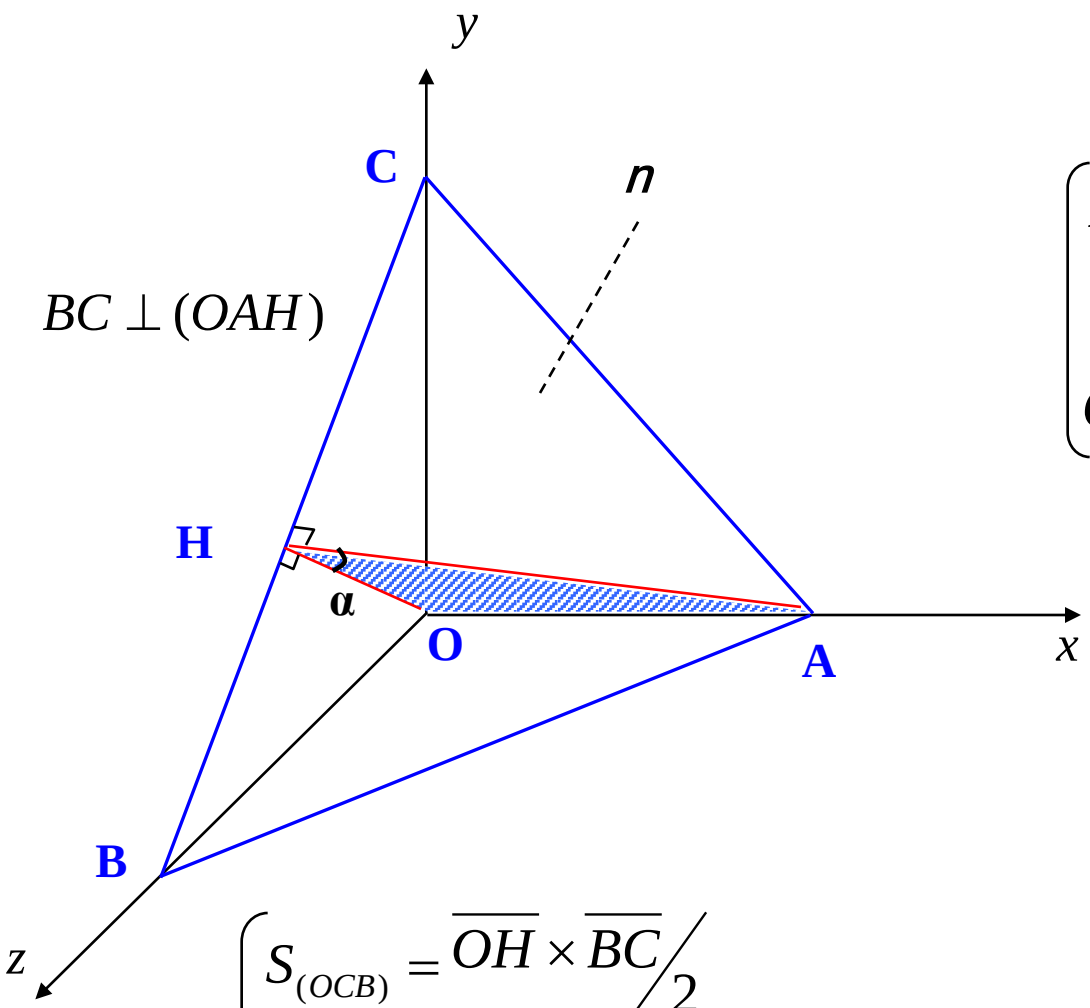
a_{ny}: کسینوس هادی راستای n نسبت به j

a_{nz}: کسینوس هادی راستای n نسبت به k



$a_{nx} = \cos(n, x)$ یا کسینوس زاویه بین n و i

$$\begin{cases} S_{(OCB)} = S_{(ABC)} \times a_{nx} \\ S_{(OAC)} = S_{(ABC)} \times a_{nz} \\ S_{(OAB)} = S_{(ABC)} \times a_{ny} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$



$BC \perp (OAH)$

$$\begin{cases} AO \perp (OB) \,\&\, AO \perp (OC) \\ \longrightarrow \quad AO \perp (OBC) \\ OH \perp (BC) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{nx} = \cos(n, x) \\ n \perp \overline{AH} \,\&\, x \perp \overline{OH} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad a_{nx} = \cos(\overline{AH}, \overline{OH}) = \cos\alpha$$

$$\begin{cases} S_{(OCB)} = \overline{OH} \times \overline{BC} / 2 \\ S_{(ABC)} = \overline{AH} \times \overline{BC} / 2 \\ \overline{OH} = \overline{AH} \times \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} S_{(OCB)} &= S_{(ABC)} \times \cos\alpha \\ &= S_{(ABC)} \times a_{nx} \end{aligned}}$$

قانون تعادل در راستای n (حذف جملات اینرسی و نیروی ثقل):

$$\begin{aligned}\tau_{nn}S_{(ABC)} &-\tau_{xx}S_{(OCB)}a_{nx}-\tau_{xy}S_{(OCB)}a_{ny}-\tau_{xz}S_{(OCB)}a_{nz}\\ &-\tau_{yx}S_{(OAB)}a_{nx}-\tau_{yy}S_{(OAB)}a_{ny}-\tau_{yz}S_{(OAB)}a_{nz}\\ &-\tau_{zx}S_{(OAC)}a_{nx}-\tau_{zy}S_{(OAC)}a_{ny}-\tau_{zz}S_{(OAC)}a_{nz}=0\end{aligned}$$

با جایگذاری از معادلات (I):

$$\begin{aligned}\tau_{nn} &= \tau_{xx}a_{nx}^2+\tau_{xy}a_{nx}a_{ny}+\tau_{xz}a_{nx}a_{nz}\\ &+\tau_{yx}a_{ny}a_{nx}+\tau_{yy}a_{ny}^2+\tau_{yz}a_{ny}a_{nz}\\ &+\tau_{zx}a_{nz}a_{nx}+\tau_{zy}a_{nz}a_{ny}+\tau_{zz}a_{nz}^2\\ &=\tau_{xx}a_{nx}^2+\tau_{yy}a_{ny}^2+\tau_{zz}a_{nz}^2+2(\tau_{xy}a_{nx}a_{ny}+\tau_{xz}a_{nx}a_{nz}+\tau_{yz}a_{ny}a_{nz})\end{aligned}$$

با جایگذاری X'، Y' و Z' به جای n می توان تنش را در سیستم متعامد $X'Y'Z'$ بدست آورد:

$$\begin{cases}\tau_{x'x'}=\tau_{xx}a_{x'x}^2+\tau_{yy}a_{x'y}^2+\tau_{zz}a_{x'z}^2+2(\tau_{xy}a_{x'x}a_{x'y}+\tau_{xz}a_{x'x}a_{x'z}+\tau_{yz}a_{x'y}a_{x'z})\\ \tau_{y'y'}=\tau_{xx}a_{y'x}^2+\tau_{yy}a_{y'y}^2+\tau_{zz}a_{y'z}^2+2(\tau_{xy}a_{y'x}a_{y'y}+\tau_{xz}a_{y'x}a_{y'z}+\tau_{yz}a_{y'y}a_{y'z})\\ \tau_{z'z'}=\tau_{xx}a_{z'x}^2+\tau_{yy}a_{z'y}^2+\tau_{zz}a_{z'z}^2+2(\tau_{xy}a_{z'x}a_{z'y}+\tau_{xz}a_{z'x}a_{z'z}+\tau_{yz}a_{z'y}a_{z'z})\end{cases}$$

به طریق مشابه می توان در راستای دلخواه s را بر روی سطح عمود بر بدست آورد:

$$\begin{aligned}\tau_{ns}S_{(ABC)} &- \tau_{xx}S_{(OCB)}a_{sx} - \tau_{xy}S_{(OCB)}a_{sy} - \tau_{xz}S_{(OCB)}a_{sz} \\ &- \tau_{yx}S_{(OAB)}a_{sx} - \tau_{yy}S_{(OAB)}a_{sy} - \tau_{yz}S_{(OAB)}a_{sz} \\ &- \tau_{zx}S_{(OAC)}a_{sx} - \tau_{zy}S_{(OAC)}a_{sy} - \tau_{zz}S_{(OAC)}a_{sz} = 0\end{aligned}$$

با جایگذاری از معادلات (I):

$$\begin{aligned}\tau_{ns} &= \tau_{xx}a_{nx}a_{sx} + \tau_{xy}a_{nx}a_{sy} + \tau_{xz}a_{nx}a_{sz} \\ &+ \tau_{yx}a_{ny}a_{sx} + \tau_{yy}a_{ny}a_{sy} + \tau_{yz}a_{ny}a_{sz} \\ &+ \tau_{zx}a_{nz}a_{sx} + \tau_{zy}a_{nz}a_{sy} + \tau_{zz}a_{nz}a_{sz} \\ &= \tau_{xx}a_{nx}a_{sx} + \tau_{yy}a_{ny}a_{sy} + \tau_{zz}a_{nz}a_{sz} \\ &+ \tau_{xy}(a_{nx}a_{sy} + a_{ny}a_{sx}) + \tau_{xz}(a_{nx}a_{sz} + a_{nz}a_{sx}) + \tau_{yz}(a_{ny}a_{sz} + a_{nz}a_{sy})\end{aligned}$$

با جایگذاری X' به جای n و Z' به جای s میتوان تنش $\tau_{x'z'}$ را در سیستم متعامد $X'Y'Z'$ بدست آورد:

$$\tau_{x'z'} = \tau_{xx} a_{x'x} a_{z'x} + \tau_{yy} a_{x'y} a_{z'y} + \tau_{zz} a_{x'z} a_{z'z}$$
$$+ \tau_{xy}(a_{x'x} a_{z'y} + a_{x'y} a_{z'x}) + \tau_{xz}(a_{x'x} a_{z'z} + a_{x'z} a_{z'x}) + \tau_{yz}(a_{x'y} a_{z'z} + a_{x'z} a_{z'y})$$

میتوان برای تنشهای $\tau_{x'y'}$ و $\tau_{y'z'}$ نیز روابط مشابهی بدست آورد:

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xx} a_{x'x} a_{y'x} + \tau_{yy} a_{x'y} a_{y'y} + \tau_{zz} a_{x'z} a_{y'z}$$
$$+ \tau_{xy}(a_{x'x} a_{y'y} + a_{x'y} a_{y'x}) + \tau_{xz}(a_{x'x} a_{y'z} + a_{x'z} a_{y'x}) + \tau_{yz}(a_{x'y} a_{y'z} + a_{x'z} a_{y'y})$$

$$\tau_{y'z'} = \tau_{xx} a_{y'x} a_{z'x} + \tau_{yy} a_{y'y} a_{z'y} + \tau_{zz} a_{y'z} a_{z'z}$$
$$+ \tau_{xy}(a_{y'x} a_{z'y} + a_{y'y} a_{z'x}) + \tau_{xz}(a_{y'x} a_{z'z} + a_{y'z} a_{z'x}) + \tau_{yz}(a_{y'y} a_{z'z} + a_{y'z} a_{z'y})$$

بنابراین با معلوم بودن ۹ مولفه تانسور مرتبه دوم تنش در مختصات XYZ میتوان تانسور تنش را در سیستم دوران یافته $X'Y'Z'$ بدست آورد.

۳ ثابت زیر مستقل از دوران سیستم مختصات بوده و مابین مولفه های تانسور تنش وجود دارند(I_1 ، I_2 و I_3 ضرائب معادله $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$ جهت تعیین تنشهای اصلی σ_p هستند):

$$I_1 = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}$$

$$I_2 = \tau_{xx}\tau_{yy} + \tau_{xx}\tau_{zz} + \tau_{yy}\tau_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

به عنوان نمونه:

$$I_1 = \tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'}$$

$$= \tau_{xx}(a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 + a_{z'x}^2) + \tau_{yy}(a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 + a_{z'y}^2) + \tau_{zz}(a_{x'z}^2 + a_{y'z}^2 + a_{z'z}^2)$$

$$+ 2\tau_{xy}(a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y})$$

$$+ 2\tau_{xz}(a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z})$$

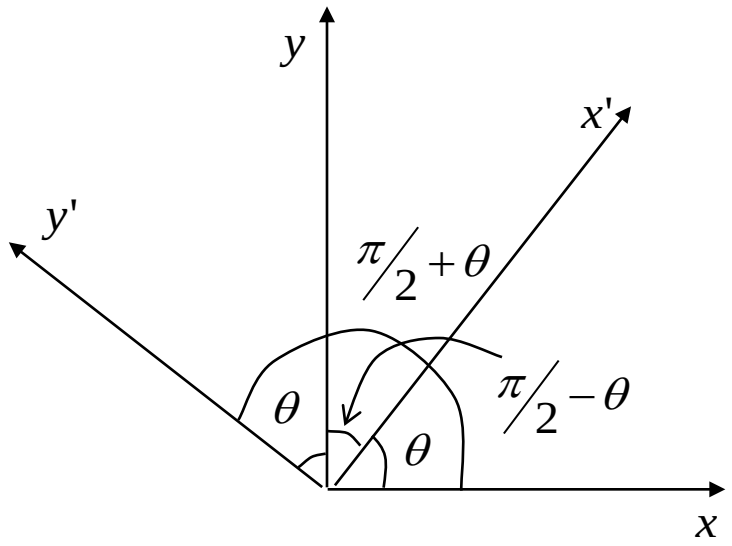
$$+ 2\tau_{yz}(a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z})$$

اما با توجه به خواص ماتریس کسینوس هادی ($R = \begin{bmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{bmatrix}$) :

$$\begin{cases} a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 + a_{z'x}^2 = 1 \\ a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 + a_{z'y}^2 = 1 \\ a_{x'z}^2 + a_{y'z}^2 + a_{z'z}^2 = 1 \\ a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y} = 0 \\ a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z} = 0 \\ a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'} = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = cte$$

در حالت دو بعدی:



$$R=\begin{bmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} \\ a_{y'x} & a_{y'y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\pi/2-\theta) \\ \cos(\pi/2+\theta) & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

که همان ماتریس دوران به اندازه θ می باشد. با جایگذاری در روابط اسلایدهای ۱۱ و ۱۳:

$$\tau_{x'x'}=\tau_{xx}a_{x'x}^2+\tau_{yy}a_{x'y}^2+2\tau_{xy}a_{x'x}a_{x'y}=\tau_{xx}\cos^2\theta+\tau_{yy}\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\tau_{y'y'}=\tau_{xx}a_{y'x}^2+\tau_{yy}a_{y'y}^2+2\tau_{xy}a_{y'x}a_{y'y}=\tau_{xx}\sin^2\theta+\tau_{yy}\cos^2\theta-2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

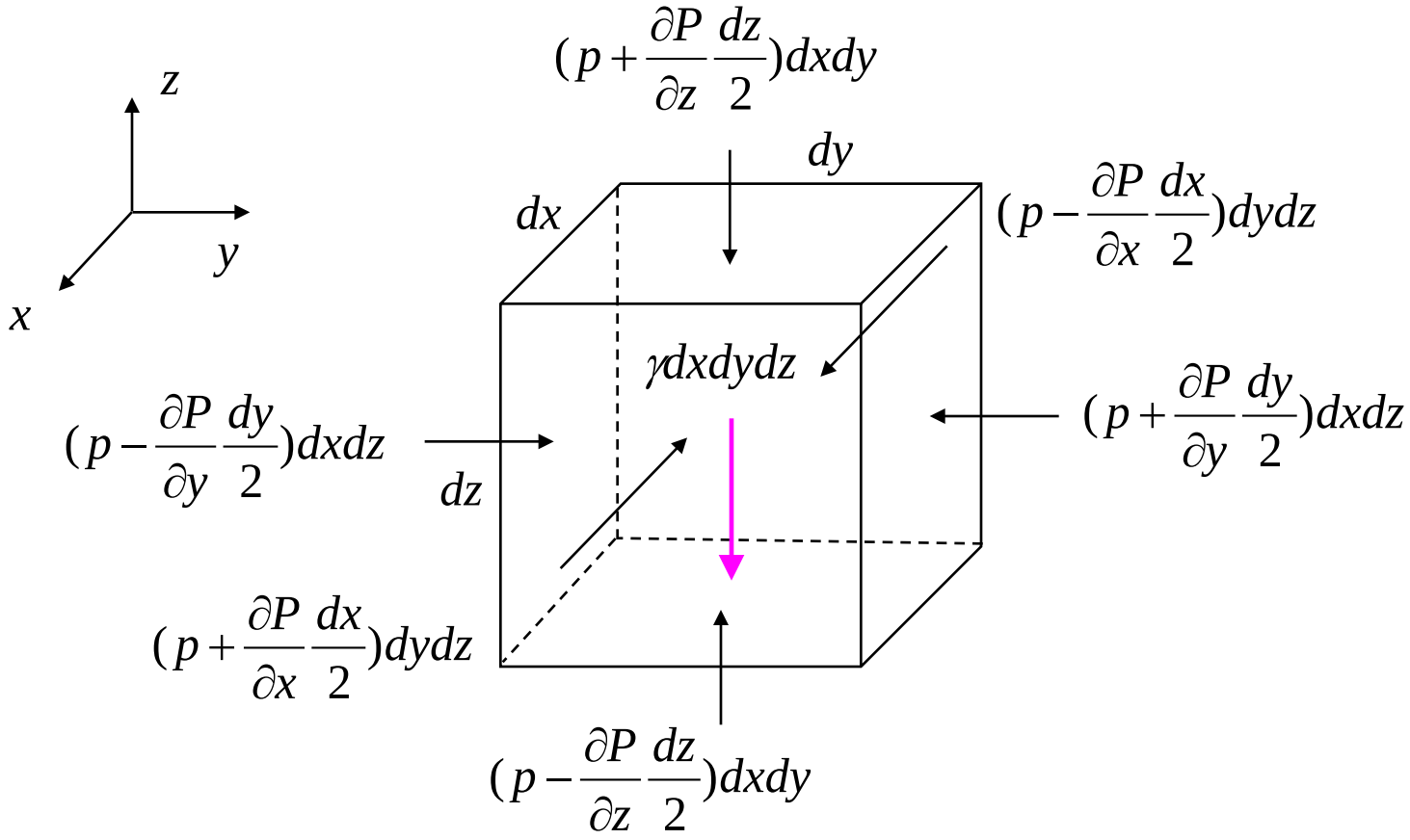
$$\tau_{x'y'}=\tau_{xx}a_{x'x}a_{y'x}+\tau_{yy}a_{x'y}a_{y'y}+\tau_{xy}(a_{x'x}a_{y'y}+a_{x'y}a_{y'x})$$

$$=(\tau_{yy}-\tau_{xx})\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

استاتیک سیالات: (Fluid statics)

اگر تمام ذرات سیال ساکن بوده و یا دارای سرعت ثابت یکسانی باشند، سیال تعادل استاتیکی دارد. در این حالت تنش برشی وجود نداشته و تنها کمیت اسکالر فشار در سیال وجود دارد.

نیروهای سطحی و حجمی (در اینجا صرفا نیروی ثقل) بر المان اعمال می شوند. با در نظر گرفتن فشار p در مرکز المان و با استفاده از بسط تیلور ($f(x+dx,y,z) = f(x,y,z) + (\partial f(x,y,z)/\partial x)dx$):



از معادلات تعادل در راستاهای X ، Y و Z :

$$\begin{cases} dF_x = -\dfrac{\partial P}{\partial x}dxdydz \\ dF_y = -\dfrac{\partial P}{\partial y}dxdydz \\ dF_z = -\dfrac{\partial P}{\partial z}dxdydz \end{cases}$$

بنابراین بردار جزء نیروی وارد بر جزء حجم برابر است با:

$$d\vec{F} = dF_x\vec{i} + dF_y\vec{j} + dF_z\vec{k}$$

$$= (-\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} - \gamma\vec{k})dxdydz$$

اگر نیروی وارد بر واحد حجم در نظر گرفته شود ($dv = dxdydz$):

$$d\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dv} = (-\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} - \gamma\vec{k})$$

$$= -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k}$$

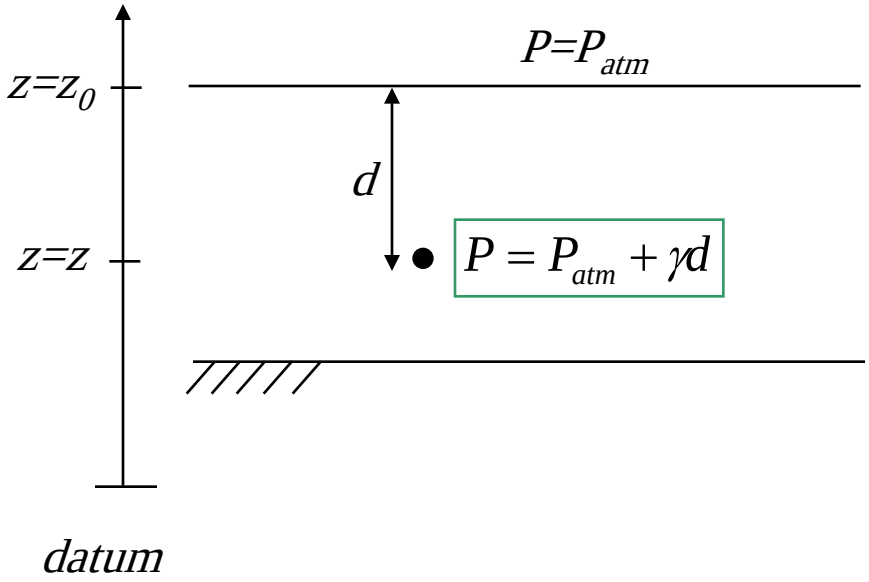
که عملگر (Operator) $\vec{\nabla}$ (del) به شکل زیر تعریف می شود:

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

برآیند نیروی فشار وارد بر یک نقطه می باشد که در سیال بدون شتاب باید صفر باشد:

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \end{cases}$$

بنابراین فشار تنها در راستای z (که جهت مثبت آن خلاف جاذبه فرض شده است) تغییر می کند. P تابعی از x و y نیست، لذا:



$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\gamma}$$

$$\int_z^{z_0} -\gamma dz = \int_P^{P_{atm}} dP$$

$$-\gamma z\Big]_z^{z_0} = P\Big]_P^{P_{atm}}$$ (با فرض سیال تراکم ناپذیر γ ثابت)

$$-\gamma(z_0 - z) = P_{atm} - P$$

$$P = P_{atm} + \gamma(z_0 - z)$$

$$= P_{atm} + \gamma d$$

اگر $P\text{-}P_{atm}$ را فشار نسبی (Gage pressure) بنامیم:

$$P_g = P - P_{atm} = \gamma d$$

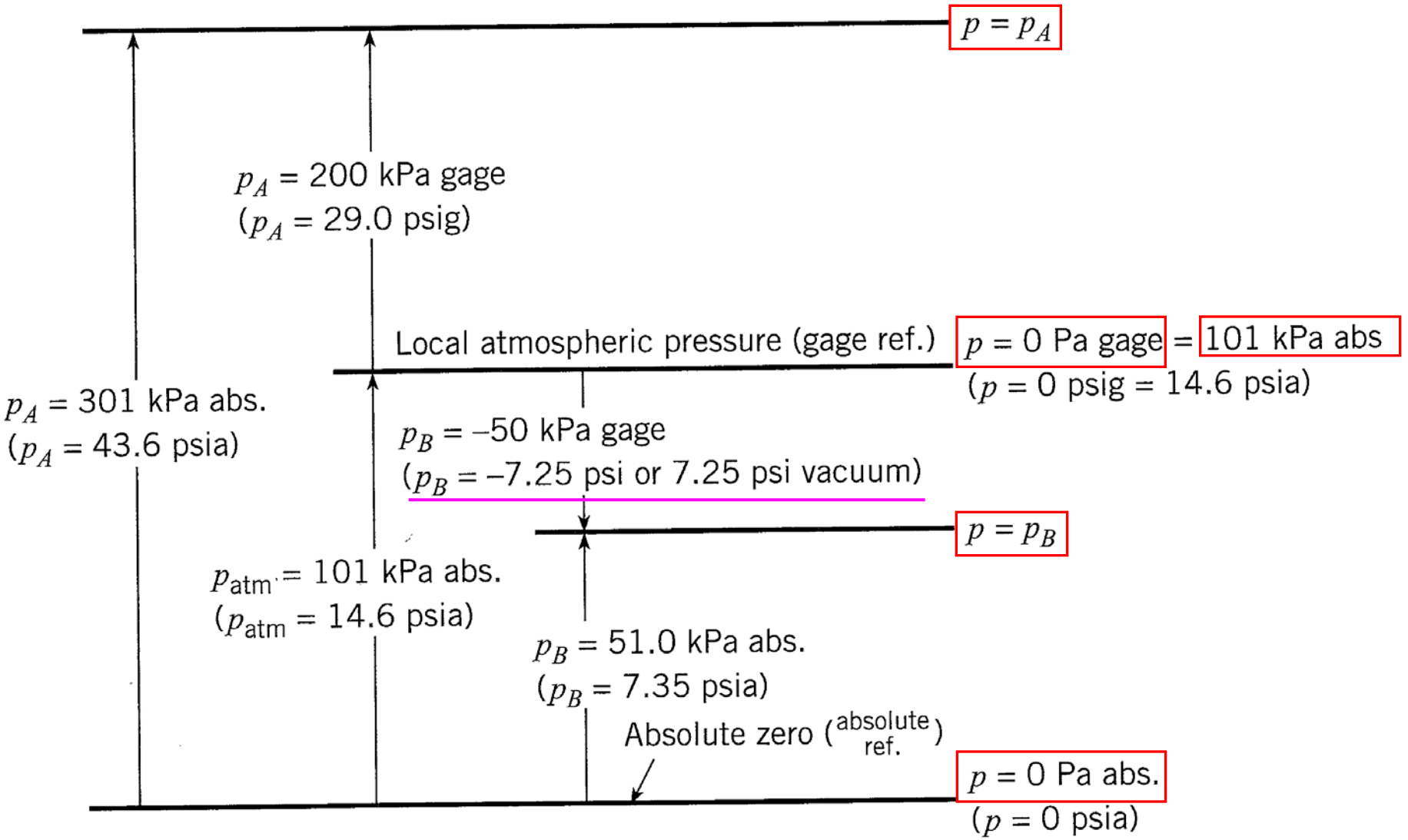
بسیاری از تجهیزات مهندسی فشار نسبی را اندازه گیری می کنند.

فشار در فضای بیرون از زمین (extra terrestrial) صفر است (Absolute Zero). تمام فشارهای اندازه گیری شده نسبت به این فشار که فشار مطلق نامیده می شود (absolute pressure) سنجیده می شوند.

P_g در فشارهای کمتر از فشار اتمسفر منفی است (حداکثر $-P_{atm}$ در خلا کامل یا صفر مطلق). در چنین وضعیتهایی که فشار نسبی منفی می شود فشار خلا (Vacuum pressure) تعریف می شود:

$$P_{vac} = -P_g = P_{atm} - P$$

Absolute Pressure, Gage Pressure and Vacuum (example)



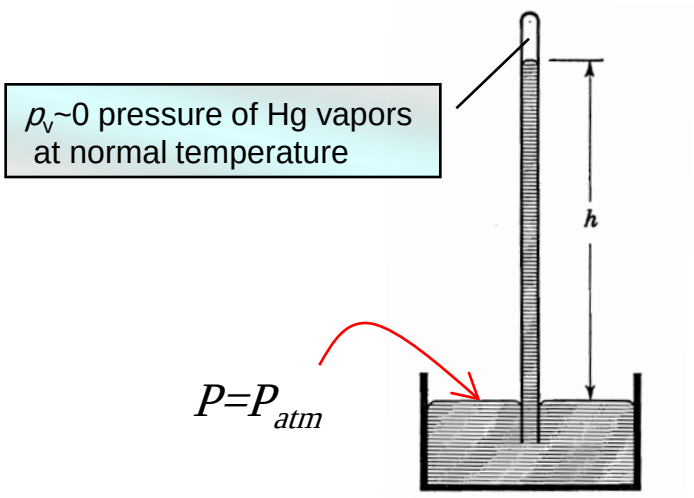
اندازه گیری فشار-مانومتری: (Pressure measurement-Manometery)

مانومترها: (Manometers)

مانومترها وسایلی هستند که با توجه به ستونهای مایعات اختلاف فشار را نشان می دهد.

بارومتر: (Barometer)

بارومتر جیوه ای برای تعیین فشار مطلق هوا استفاده می شود. در بارومتر انتهای لوله بسته بوده، از هوا تخلیه شده و آب بندی میشود.

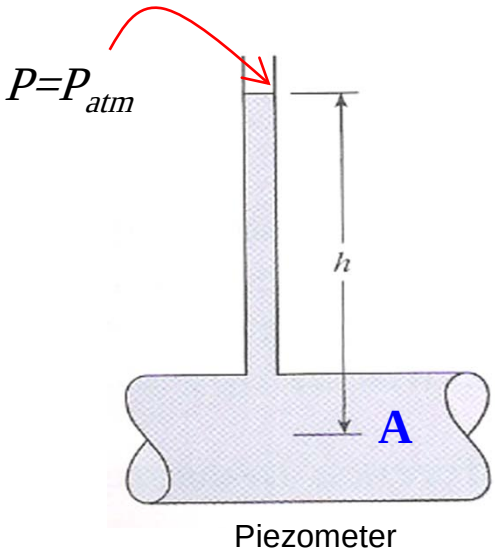


$$P_u = 0$$

$$P_A = P_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

پیزومتر: (Piezometer)

پیزومترها مانومترهای ساده ای هستند که برای اندازه گیری فشار سیالات هنگامی که فشار نسبی مثبت است، استفاده می شوند. بر خلاف بارومتر، در پیزومترها انتهای لوله باز می باشد. بدیهی است که در صورت منفی بودن فشار نسبی، هوا از راه لوله وارد آب شده و نمی توان فشار را اندازه گیری کرد.



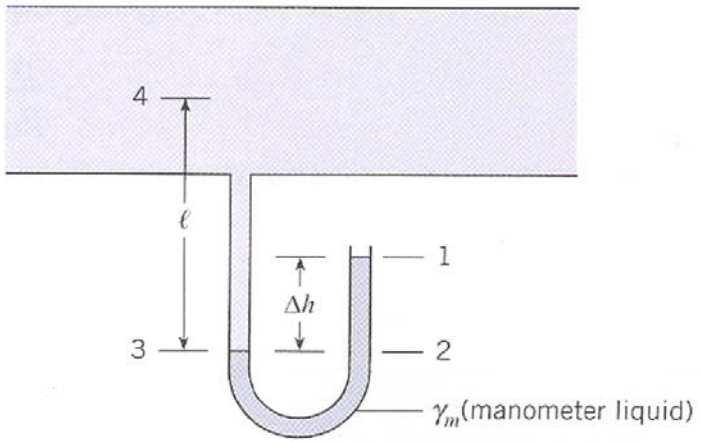
Piezometer

$$P_A = P_{atm} + \gamma h$$

$$P_A(g) = \gamma h$$

بدیهی است که در صورت منفی بودن فشار نسبی، هوا از راه لوله وارد آب شده و نمی توان فشار را اندازه گیری کرد. برای اندازه گیری فشارهای نسبی منفی یا مثبت کوچک می توان از لوله U شکل استفاده کرد. در این حالت امکان قرارگیری مایع لوله در ترازی کمتر از تراز متوسط ظرف نیز وجود دارد.

در فشارهای نسبی منفی یا مثبت بزرگتر، از مایع دارای چگالی بیشتری استفاده می شود. این مایع باید با سیال اولیه غیر قابل اختلاط باشد



$p_2=p_3$ (same elevation)

$p_2=p_1+\gamma_m \Delta h=\gamma_m \Delta h$

$p_3= p_4+\gamma l$

$\Rightarrow$ $p_4 + \gamma l = \gamma_m \Delta h$

$p_4= \gamma_m \Delta h - \gamma l$

در حالت کلی می توان از رابطه زیر نیز استفاده کرده فشار هر نقطه دلخواه را بدست آورد (ازنقطه n شروع کرده و به سمت نقطه m حرکت می کنیم، حرکت به سمت پایین به افزایش فشار و حرکت به بالا به کاهش فشار منتهی می شود):

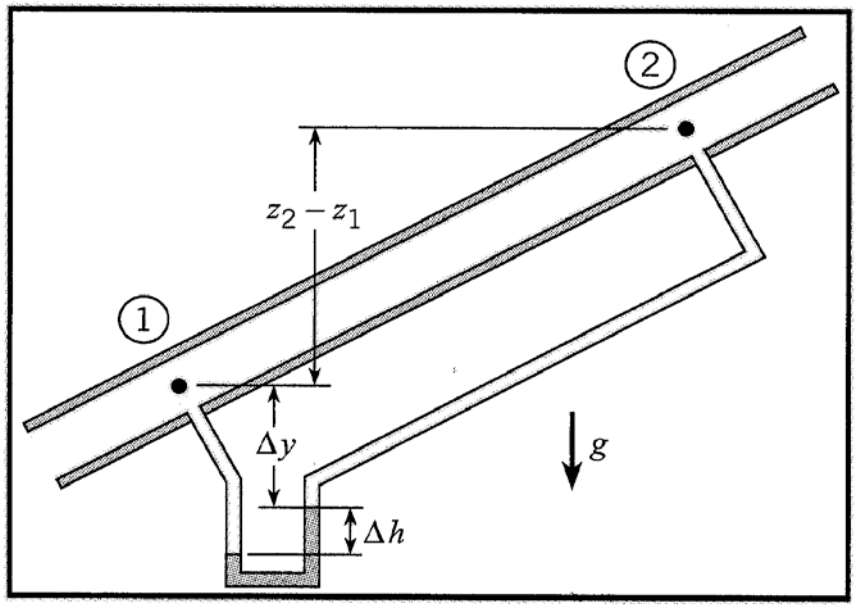
$$p_m=p_n+\Sigma_{down}\gamma_i h_i-\Sigma_{up}\gamma_i h_i$$

در مثال فوق با حرکت از نقطه ۱ به سمت ۴:

$p_4=p_1+\gamma_m \Delta h-\gamma l$

$= \gamma_m \Delta h - \gamma l$

مانومترهای تفاضلی (Differential manometer)



مانومترهای تفاضلی (*Differential manometer*)
اختلاف فشار بین نقاط را نشان می دهند در حالی که فشار واقعی در هیچ نقطه از سیستم را نمی توان بدست آورد:

$$p_2 = p_1 + \gamma_w(\Delta y + \Delta h) - \gamma_m \Delta h - \gamma_w(\Delta y + z_2 - z_1)$$

تغییرات فشار در سیال قابل تراکم: (Pressure variation for a static compressible fluid)

در سیال تراکم پذیر، وزن مخصوص ثابت نیست. اگر بحث را به گازهای کامل محدود کنیم:

الف- گاز کامل ایزوترمال: (Isothermal perfect gas)

$$\frac{p}{\rho T}=\frac{p_1}{\rho_1 T_1}=R \xrightarrow[T=cte]{} \frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho_1}=c \quad \text{و یا} \quad \frac{pg}{\gamma}=\frac{p_1 g_1}{\gamma_1}=c$$

با فرض اینکه محدوده تغییرات ارتفاع به گونه ای نباشد که شتاب ثقل تغییر کند،

$$\begin{cases} \dfrac{p}{\gamma}=\dfrac{p_1}{\gamma_1}=c' \\ \dfrac{dp}{dz}=-\gamma \quad \text{(معادله اصلی تغییر فشار در سیال تراکم پذیر و تراکم ناپذیر)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{dp}{dz}=-\frac{p\gamma_1}{P_1}$$

$$\frac{dp}{P}=-\frac{\gamma_1}{P_1}dz \qquad \int_{P_1}^{P}\frac{dp}{P}=-\frac{\gamma_1}{P_1}\int_{Z_1}^{Z}dz \qquad \ln P\Big]_{P_1}^{P}=\frac{-\gamma_1}{P_1}z\Big]_{z_1}^{z} \qquad \ln\frac{p}{P_1}=-\frac{\gamma_1}{P_1}(z-z_1)$$

$$\Longrightarrow$$

با استفاده از این رابطه معلوم بودن فشار P_1 و وزن مخصوص γ_1 در ارتفاع z_1، فشار در ارتفاع z بدست می آید.

$$P=P_1\exp[\frac{-\gamma_1}{P_1}(z-z_1)$$

ب- رابطه دما و ارتفاع خطی است:

$T = T_1 + kz$ (T_1 دمای مبنا در z=0)

نرخ تنزل (Lapse rate)

$$dz = \frac{dT}{k} \quad \text{(I)} \quad \text{و یا}$$

$$\frac{p}{\rho T} = R$$

$$\frac{pg}{\gamma T} = R \Longrightarrow \gamma = \frac{pg}{RT} \qquad \text{(II)}$$

با قرار دادن معادلات (I) و (II) در معادله اصلی فشار سیال: ($\frac{dp}{dz} = -\gamma$)

$$dp = -\gamma dz$$

$$= \frac{-pg}{RT} \times \frac{dT}{k} \qquad \text{و یا} \qquad \frac{dp}{P} = -\frac{g}{kR} \times \frac{dT}{T}$$

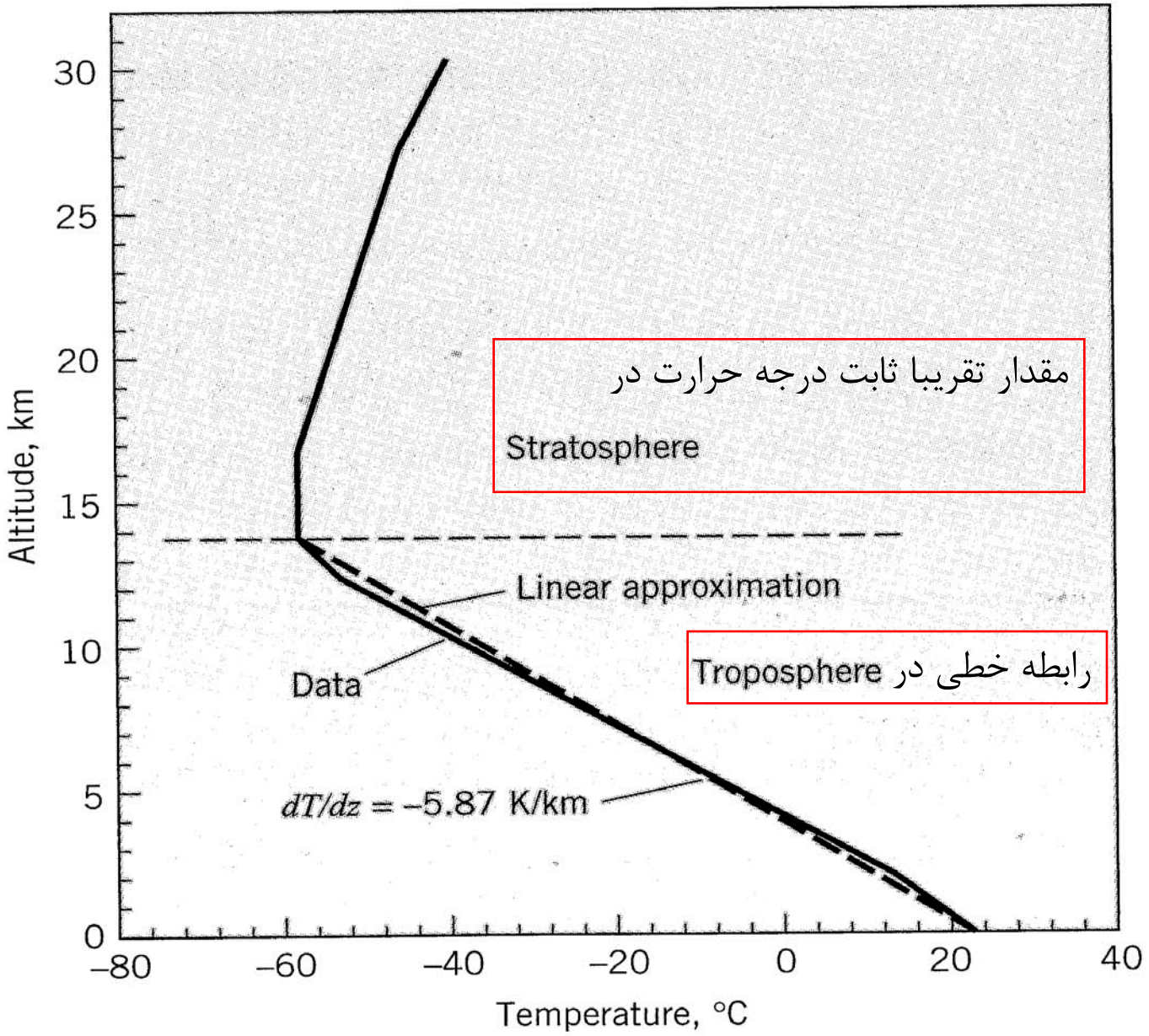
$$\int_{P_1}^{P} \frac{dp}{P} = -\frac{g}{kR} \int_{T_1}^{T} \frac{dT}{T}$$

T_1 و p_1 به ترتیب دما و فشار در تراز مبنا z=0

$$\ln P \Big]_{P_1}^{P} = -\frac{g}{kR} \ln T \Big]_{T_1}^{T} \qquad \ln \frac{p}{p_1} = -\frac{g}{kR} \ln \frac{T}{T_1} = \frac{g}{kR} \ln \frac{T_1}{T}$$

$$\Longrightarrow \boxed{p = p_1 \left(\frac{T_1}{T}\right)^{g/kR} = p_1 \left(\frac{T_1}{T_1 + kz}\right)^{g/kR}}$$

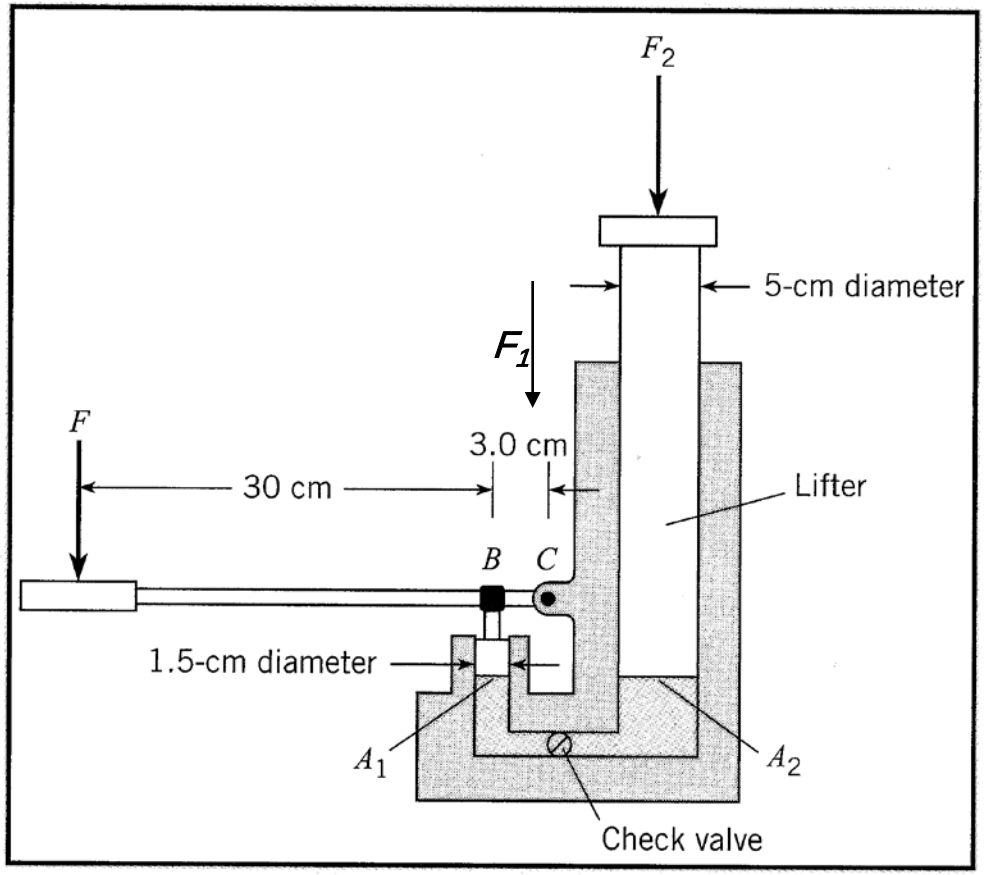
تغییرات دمای اتمسفر زمین با افزایش ارتفاع

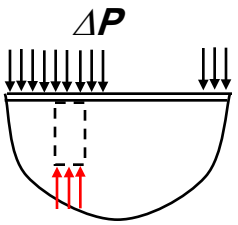


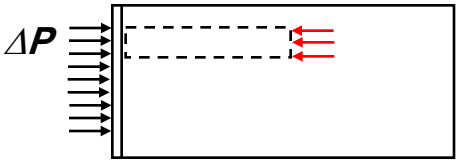
U.S.National Weather Service: 45ºN latitude in July

انتقال فشار: (Pressure transmision)

اگر به قسمتی از مرز سیالی (قابل تراکم یا غیر قابل تراکم) محبوس (confined) و ساکن فشار خارجی اعمال شود، پس از فروکش کردن حرکات این فشار به تمام نقاط سیال منتقل می شود (قانون پاسکال). برای اثبات، با توجه به عدم تحمل تنش برشی در سیال ساکن می توان المانهایی افقی و قائم در سیال در نظر گرفت که فشار وارده بر یک وجه آنها مستقیما به انتهای المان منتقل می شود. از آنجایی که اغلب فشار اعمال شده به مراتب بیشتر از تغییر فشار قائم ناشی از وزن سیال می باشد، می توان مقدار فشار داخلی سیال را در تمام نقاط تقریبا یکسان در نظر گرفت.







این اصل اساس کار ترمز و جک هیدرولیکی است:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\Delta P \times A_2}{\Delta P \times A_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

(ΔP افزایش فشار اعمال شده به سیال است)

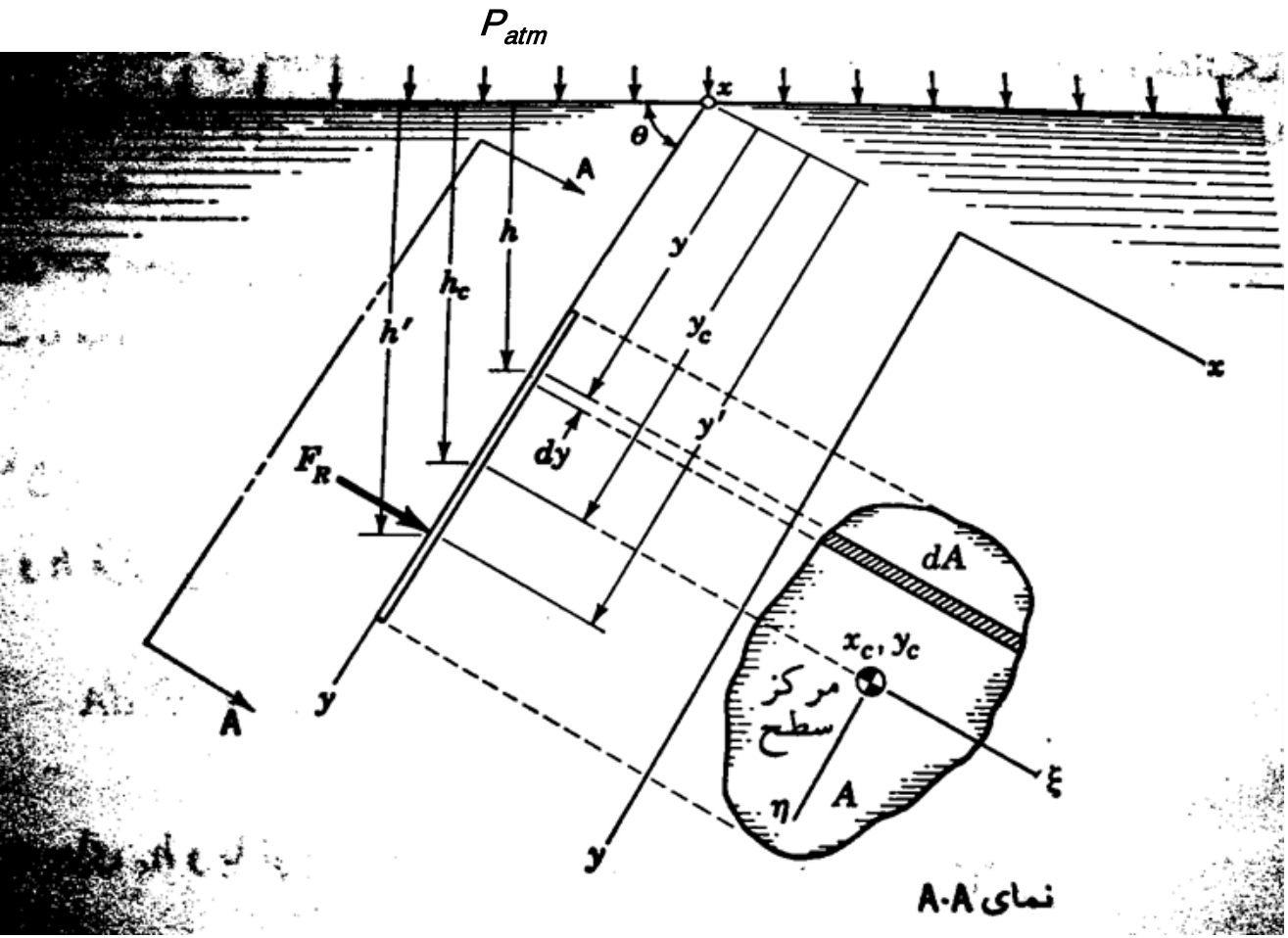
$$A_2 >> A_1 \Rightarrow F_2 >> F_1$$

مشاهده می شود که مزیت مکانیکی بالایی ایجاد می شود.

Hydrostatics (2)

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح مسطح غوطه ور در سیال غیر قابل تراکم ساکن:

(Static incompressible submerged fluid)



بدلیل عدم وجود تنش برشی، نیروی وارد بر سطوح غوطه ور عمود بر آن می باشد. برآیند نیروی فشار ناشی از فشار یکنواخت (P_{atm}) برابر است با:

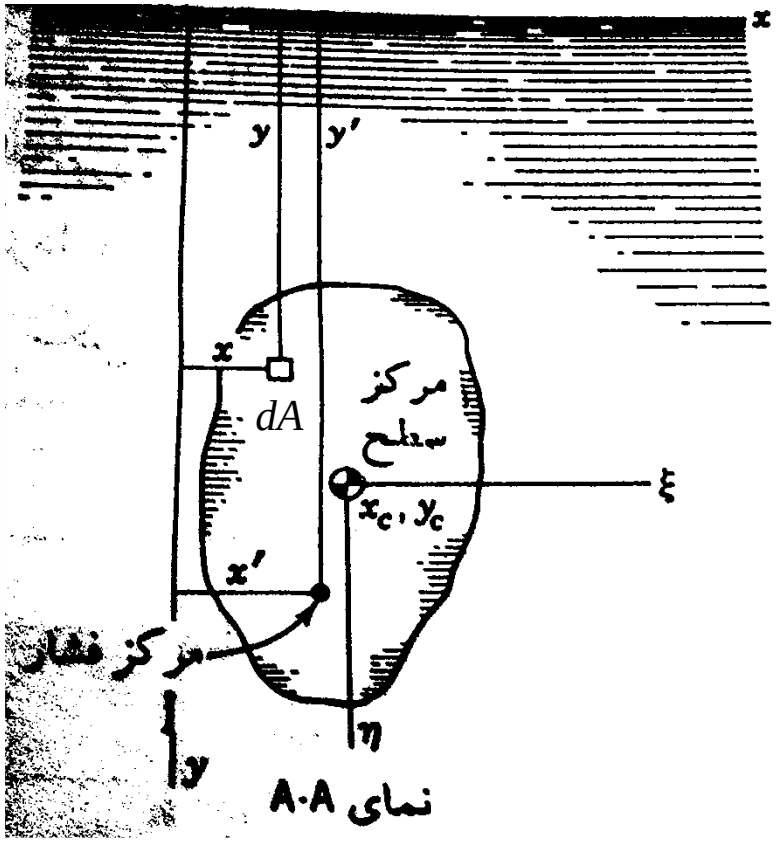
$$\int_A P_{atm}\,dA = P_{atm}\int_A dA = P_{atm}A$$

جزء سطحی اختیاری واقع بر سطح جسم

برای بدست آوردن فشار هیدرواستاتیک سیال، نوار dA را به شکلی انتخاب می کنیم که تمام نقاط آن عمق یکسانی داشته باشند.

در این حالت فشار وارد بر تمام نقاط یکنواخت و برابر γh می باشد. جزء نیروی وارد بر dA:

$$dF = \gamma h dA$$



بنابر این کل نیروی وارد بر سطح A:

$$F_R = \int_A dF = \int_A (\gamma h) dA = \gamma \sin\theta \int_A y dA$$

ممان استاتیک سطح حول محور x ها $= Ay_c$

$$F_R = \gamma \sin\theta y_c A = \gamma h_c A = P_c A$$

بنابراین می توانیم فرض کنیم فشار یکنواختی برابر P_c (فشار در مرکز سطح) به تمام صفحه اثر می کند.

برای بدست آوردن محل اثر نیروی برآیند F_R (y')، لنگر توزیع فشار نسبت به محور x ها را در نظر می گیریم:

$$F_R y' = \int_A \underbrace{(\gamma h) dA}_{dF} \times y$$

dM_x

$$\gamma h_c A y' = \int_A \gamma y \sin\theta y dA$$

$$\gamma \sin\theta y_c A y' = \gamma \sin\theta \int_A y^2 dA$$

$$\gamma \sin\theta y_c A y' = \gamma \sin\theta I_{xx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{I_{xx}}{A y_c}}$$

که در آن I_{XX} ممان دوم سطح حول محور X ها است.

اگر به جای I_{XX} عبارت $I_{\xi\xi}+Ay_c^2$ را قرار دهیم که $I_{\xi\xi}$ ممان دوم سطح حول محور ξ عبوری از مرکز سطح به موازات محور X ها می باشد:

$$y' = \frac{A y_c^2 + I_{\xi\xi}}{A y_c} = \boxed{y_c + \frac{I_{\xi\xi}}{A y_c}}$$

نقطه اثر نیروی برآیند وارد بر سطح غوطه ور مرکز فشار (Center of pressure) نامیده می شود. مرکز فشار همواره زیر مرکز سطح قرار می گیرد:

$$\frac{I_{\xi\xi}}{A y_c} > 0 \quad \Rightarrow \quad y' > y_c$$

برای محاسبه x'، فاصله مرکز فشار از محور y ها، لنگر نیروی برآیند F_R و لنگر توزیع فشار نسبت به محور y ها را در نظر می گیریم:

$$F_R x' = \int_A \underbrace{(\gamma y \sin\theta) dA}_{dF} \times x \quad \underbrace{\qquad}_{dM_x}$$

جزء سطح متناظر با نقطه (x,y)

$$(\gamma \sin\theta y_c A) x' = \gamma \sin\theta \int_A xy dA$$

$$y_c A x' = I_{xy} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x' = \frac{I_{xy}}{A y_c}}$$

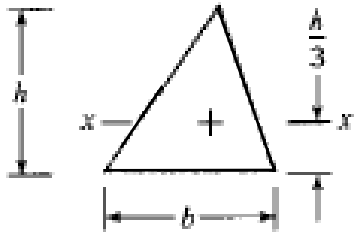
که در آن I_{xy} حاصل ضرب اینرسی (Product of inertia) دستگاه نسبت به محورهای x و y است.

اگر به جای I_{xy} ، $I_{\xi\eta}$ ممان دوم عبوری از مرکز سطح را قرار دهیم:

$$x' = \frac{A x_c y_c + I_{\xi\eta}}{A y_c} = \boxed{x_c + \frac{I_{\xi\eta}}{A y_c}}$$

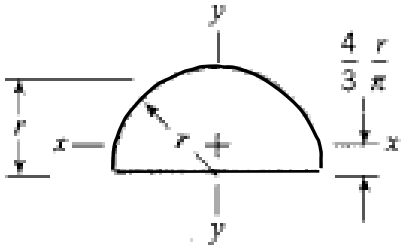
ξ و η به ترتیب موازی و عمود بر خط اثر صفحه و سطح آزاد می باشند. از آنجایی که $I_{\xi\eta}$ می تواند مثبت یا منفی باشد، مرکز فشار در هر دو طرف خط $x=x_c$ ممکن است قرار بگیرد. چنانچه یکی از محورهای ξ و η بمخور تقارن سطح باشد، $I_{\xi\eta}$ صفر شده و مرکز فشار بر روی خط $x=x_c$ قرار می گیرد.

Centroids and moments of inertia of plane surfaces



$$A = \frac{bh}{2}$$

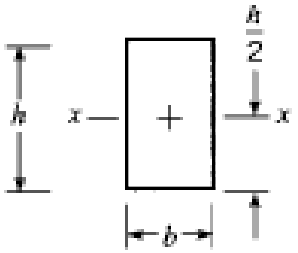
$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{36}$$



$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

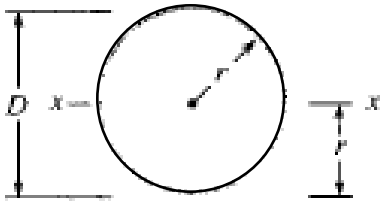
$$\bar{I}_{xx} = 0.110r^4$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi r^4}{8}$$



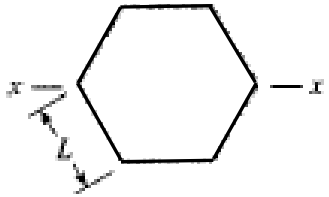
$$A = bh$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$



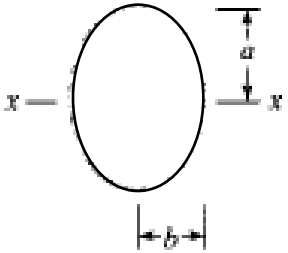
$$A = \pi r^2$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi r^4}{4}$$



$$A = 2.5981L^2$$

$$\bar{I}_x = 0.5127L^4$$

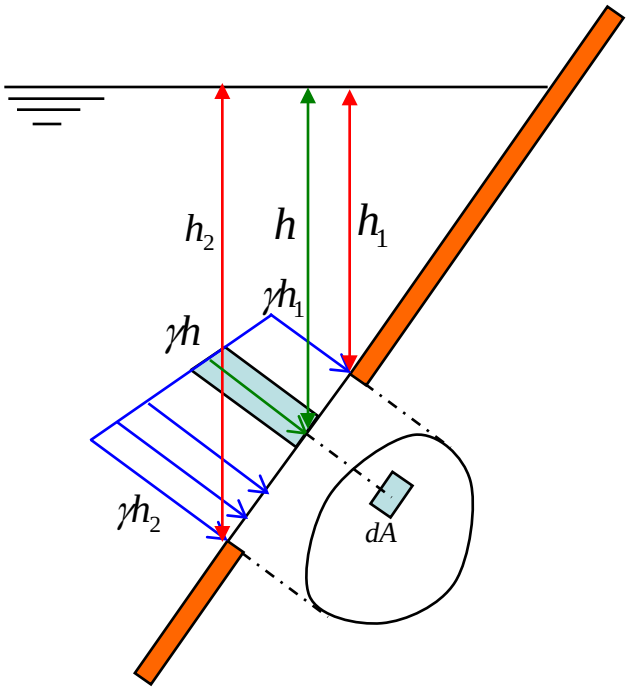


$$A = \pi ab$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

منشور فشار: (Pressure prism)

روش دیگر حل مسئله نیروی وارد بر سطوح مسطح غوطه ور تعیین نیروی برآیند و محل اثر آن استفاده از منشور فشار می باشد. این منشور حجم منشوری شکلی است که قاعده اش سطح صاف اعمال فشار بوده و ارتفاعش با رابطه $P=\gamma h$ بدست می آید (h فاصله عمودی تا سطح آزاد واقعی یا فرضی مایع می باشد).



جزء نیروی وارد بر dA :

$$dF = \gamma h dA = dV$$

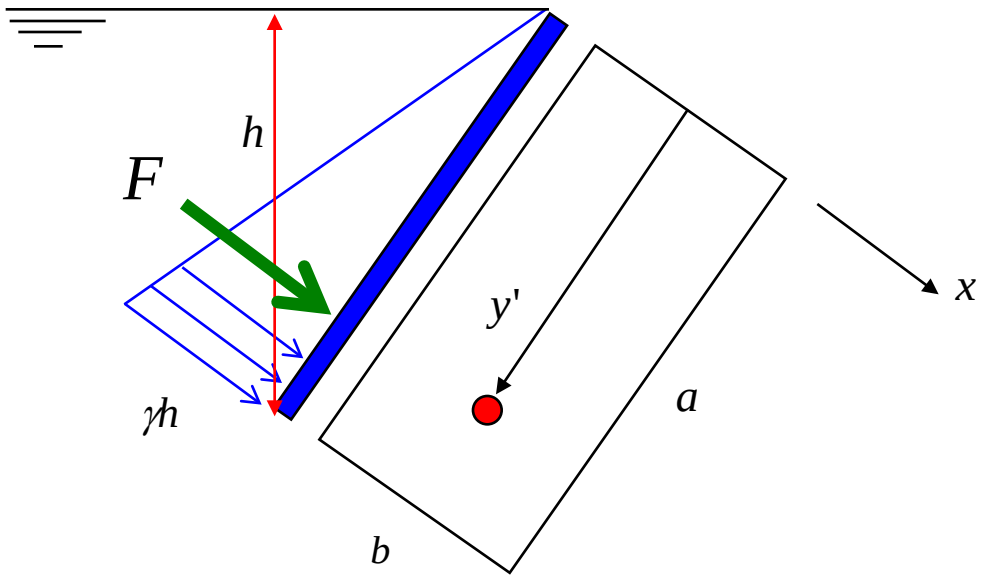
که یک عنصر حجم از منشور فشار می باشد. بنابراین کل نیروی وارده (برآیند فشار اعمال شده به سطح) برابر است با حجم منشور فشار:

$$F = \int_V dV = V$$

نیروی F از مرکز حجم منشور فشار می گذرد:

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V x dV \\ y_P = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V y dV \end{cases}$$

در بعضی شکلهای ساده روش منشور فشار بسیار مناسبتر از روش انتگرال گیری می باشد. مثلا در سطح مستطیل شکلی که ضلع فوقانی آن منطبق بر سطح آزاد مایع است، منشور فشار سه گوش (گوه ای شکل) است:



با استفاده از روابط قبل:

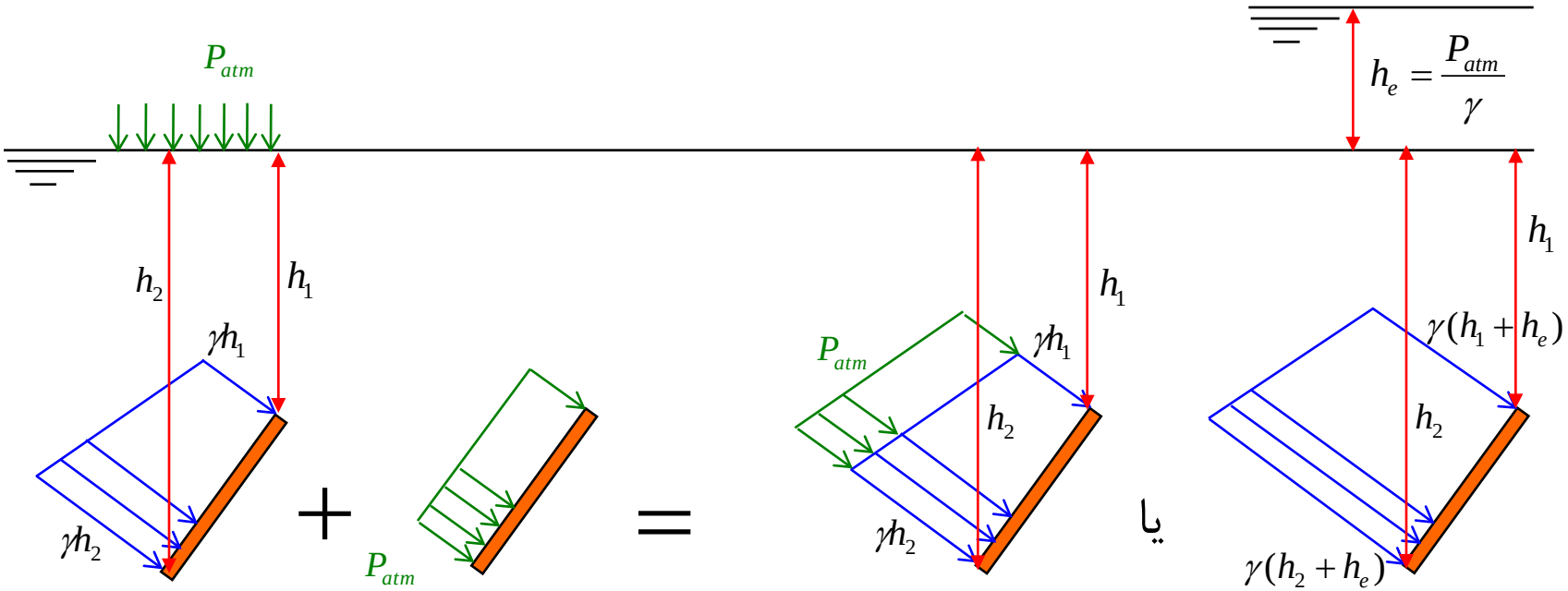
$$\begin{cases} F = P_c A = \gamma h/2\,(ab) = \dfrac{\gamma h ab}{2} \\ y' = y_c + \dfrac{I_{\zeta\zeta}}{A y_c} \\ = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1/12\, ba^3}{ab(a/2)} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{6} = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

با استفاده از روش منشور فشار:

$$\begin{cases} F = V = 1/2\,(\gamma h \times a \times b) = \dfrac{\gamma h ab}{2} \\ y' = \dfrac{2a}{3} \quad \text{(مرکز حجم در 1/3 قاعده قرار دارد)} \end{cases}$$

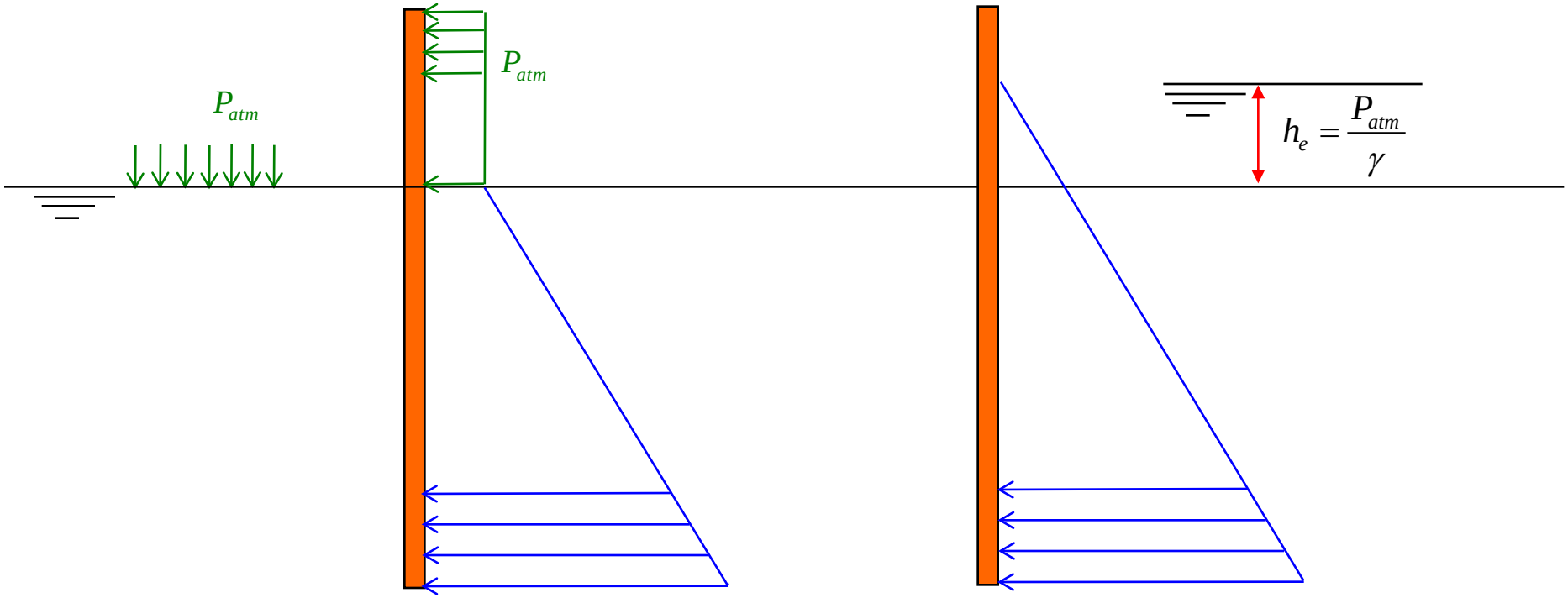
ارتفاع معادل سیال: (Equivalent height)

تاثیر فشار یکنواخت وارد بر سطح سیال را می توان با افزایش فرضی ارتفاع سیال جایگزین نمود. بدین منظور کافیست ارتفاع معادل به گونه ای انتخاب شود که فشار یکسانی در سطح سیال اعمال گردد:



استفاده از روش ارتفاع معادل گاهی راه حل ساده تری در تعیین مقدار و محل اثر نیروی وارده از طرف سیال ارائه می دهد.

واضح است که توزیع فشار صرفا در پایین تر از تراز سیال می تواند بدین روش تعیین شود و استفاده از این روش در بالاتر از تراز سیال اشتباه می باشد:



فشار صحیح

توزیع فشار در بالاتر از تراز آب غلط است.